

Chapter 12. Orthogonal Functions and Fourier Series

12.1. Orthogonal Functions

어떤 고급수학 분야에서는 함수를 벡터의 일반화된 형태로 다루기도 한다. 여기서는 두 벡터의 내적(inner or dot product)과 직교성(orthogonality)이 어떻게 함수로 확장 가능한지에 관해 알아본다.

□ Inner Product

3차원 공간에서 두 벡터 $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ 와 $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ 의 내적은 실수이며 스칼라다.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{k=1}^3 u_k v_k$$

내적의 성질은

$$(i) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}) \qquad (ii) \quad (k\vec{u}, \vec{v}) = k(\vec{u}, \vec{v}), k \text{는 스칼라}$$

$$(iii) \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ 이면 } (\vec{u}, \vec{u}) = 0, \vec{u} \neq \vec{0} \text{ 이면 } (\vec{u}, \vec{u}) > 0 \quad (iv) \quad (\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})$$

위와 같은 성질을 가지도록 내적을 일반화할 수 있다.

함수 f_1, f_2 가 구간 $[a, b]$ 에서 정의되고 부분적으로 연속일 때, 곱 $f_1(x) f_2(x)$ 의 구간에서의 정적분은 벡터와 같이 위 (i)-(iv)의 성질을 만족하므로, 다음과 같이 함수들의 내적을 정의할 수 있다.

Definition 12.1.1. Inner Product of Functions

구간 $[a, b]$ 에서 두 함수들 f_1, f_2 의 내적(inner product)은

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

□ Orthogonal Functions

두 벡터의 내적이 0이면 두 벡터가 직교(orthogonal)한다고 말하는 것과 유사하게 직교 함수(orthogonal functions)를 정의할 수 있다.

Definition 12.1.2. Orthogonal Functions

만일 아래 식이 성립하면 두 함수들 f_1, f_2 는 구간 $[a, b]$ 에서 직교(orthogonal)한다고 한다.

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0 \qquad (1)$$

[Example 1]

$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ 은 구간 $[-1, 1]$ 에서 직교한다. 식 (1)로부터

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx = \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 = 0 \quad \blacksquare$$

‘직교한다’와 ‘수직(perpendicular)이다’는 말이 동의어인 벡터와 다르게 함수에서 ‘직교’라는 말에 기하학적인 의미는 없다.

□ Orthogonal Sets

Definition 12.1.3. Orthogonal Set

실함수들의 집합 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ 이 다음을 만족하면 구간 $[a, b]$ 에서 **직교(orthogonal)** 한다고 한다.

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n \quad (2)$$

□ Orthonormal Sets

벡터 $\vec{u}$ 의 norm, 혹은 길이(length) $\|\vec{u}\|$ 은 내적의 관점에서 기술할 수 있다. $(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$ 은 square norm이라 부르고, $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$ 를 norm이라 한다. 유사하게 함수 ϕ_n 의 **square norm**은 $\|\phi_n(x)\|^2 = (\phi_n, \phi_n)$ 와 같이, **norm** 혹은 일반화된 길이(generalized length)는 $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$ 와 같이 정의된다. 다시 말하면, 직교함수 집합 내 함수 ϕ_n 의 square norm와 norm은 각각

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x) dx, \quad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx} \quad (3)$$

만일 $\{\phi_n(x)\}$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 $\|\phi_n(x)\| = 1$ 인 직교함수 집합이면, $\{\phi_n(x)\}$ 은 구간에서 **직교정규 집합(orthonormal set)**이라 한다.

[Example 2]

$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ 이 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 직교함을 보여라.

Sol. $\phi_0(x) = 1$, $\phi_n(x) = \cos nx$ 라고 표현할 수 있으므로 $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x) \phi_n(x) dx = 0$, $n \neq 0$ 와 $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$, $m \neq n$ 의 2가지 경우를 보인다. 먼저 첫번째 경우 $n \neq 0$ 에 대해

$$(\phi_0, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x) \phi_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} [\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = 0$$

두번째 경우 $m \neq n$ 에 대해

$$\begin{aligned}(\phi_m, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

[Example 3]

예제 2에 주어진 직교집합 내의 각 함수의 norm을 구하여라.

Sol. $\phi_0(x) = 1$ 에 대해서는 $\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$ 이므로 $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$ 이다.

$$\phi_n(x) = \cos nx, \quad n > 0 \text{에 대해서는 } \|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx] dx = \pi$$

이므로 $n > 0$ 에 대해 $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$ ■

임의의 0이 아닌 직교함수 집합들은 정규화(normalized)가 가능하다. 즉 각 함수를 norm으로 나눠 정규직교 집합으로 만들 수 있다. 예제 2, 3의 경우라면 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ 는 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 정규직교 집합이 된다.

□ Vector Analogy

벡터와 함수에 대해 유사성을 한 가지 더 기술할 수 있다. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 가 3차원 공간에서 세 개의 서로 직교하는 0이 아닌 벡터라 하자. 그러한 직교 집합은 3차원 공간의 기저(basis)로 사용할 수 있다. 다시 말해 임의의 3차원 벡터는 선형결합

$$\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 \quad (4)$$

와 같이 표현할 수 있으며, 이 때 상수 $c_i, i=1,2,3$ 은 스칼라이며 벡터의 성분(component)이라 부른다. 각 성분 c_i 는 $\vec{u}$ 와 $\vec{v}_i$ 의 관점에서 기술할 수 있는데, 식 (4)에 $\vec{v}_1$ 를 내적하면

$$(\vec{u}, \vec{v}_1) = c_1 (\vec{v}_1, \vec{v}_1) + c_2 (\vec{v}_2, \vec{v}_1) + c_3 (\vec{v}_3, \vec{v}_1) = c_1 \|\vec{v}_1\|^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 \quad \text{이므로 } c_1 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2} \text{ 이 된다.}$$

$$\text{유사하게 } c_2 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}, \quad c_3 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_3)}{\|\vec{v}_3\|^2} \text{ 이므로 } \vec{u} = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_3)}{\|\vec{v}_3\|^2} \vec{v}_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{(\vec{u}, \vec{v}_n)}{\|\vec{v}_n\|^2} \vec{v}_n \quad (5)$$

□ Orthogonal Series Expansion

$\{\phi_n(x)\}$ 를 구간 $[a, b]$ 에서 무한개의 함수들의 직교집합이라 하자. 만일 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수라면, 다음 식 (6)과 같이 표현되는 계수 $c_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 들의 값을 결정할 수 있는가?

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots? \quad (6)$$

앞서 벡터의 성분들을 찾아내는 과정에서 계수 c_n 들을 내적을 이용해 발견하였다. 동일한 개념을 적용하여 식 (6)에 $\phi_m(x)$ 를 곱하고 구간 $[a, b]$ 에 대해 적분하면,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\phi_m(x)dx &= c_0 \int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)dx + c_1 \int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)dx + \dots + c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx + \dots \\ &= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \dots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \dots \end{aligned}$$

그런데 직교성에 의해 우변은 $m = n$ 인 경우를 제외하고 모두 0 이다. 이 경우

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x)dx \quad \text{이므로, } c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{와 같다. 따라서}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (7), \quad c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2} \quad (8)$$

$$\text{내적의 표기법에 따른다면 (7)은 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2} \phi_n(x) \quad (9)$$

와 같이 쓸 수 있으며, 이는 식 (5)의 벡터의 경우와 유사하다.

Definition 12.1.4. Orthogonal Set/Weight Function

실함수들의 집합 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ 이 다음 식을 만족하는 경우 구간 $[a, b]$ 에서 **가중치 함수 $w(x)$ 에 대해 직교한다(orthogonal with respect to a weight function $w(x)$)**고 한다.

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

보통의 가정은 직교 구간 $[a, b]$ 에서 $w(x) > 0$ 이다. 예제 2의 $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ 는 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 가중치 함수 $w(x) = 1$ 에 대해 직교한다.

만일 $\{\phi_n(x)\}$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 가중치 함수 $w(x)$ 에 대해 직교하면, 식 (6)에 $w(x)\phi_n(x)$ 를 곱하여 구간에 대해 적분하면

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2} \quad (10), \quad \|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)dx \quad (11)$$

식 (8)이나 식 (10)을 계수로서 가지는 급수(series) (7)을 함수 f 의 **직교 급수 전개(orthogonal series expansion)** 혹은 **일반화된 푸리에 급수(generalized Fourier series)**라고 부른다.

□ Complete Sets

계수 c_n 을 구하는 과정은 굉장히 정규적인(formal) 것이다. 즉 식 (7)과 같은 직교 급수 전개가 실제로 가능한가와 같은 기본적인 질문은 무시되었다. 또한 f 를 직교 함수들로 전개하기 위해서는 f 가 직교 집합 $\{\phi_n(x)\}$ 의 각 함수 ϕ_n 과는 직교하지 않아야 한다 (만일 f 가 모든 ϕ_n 과 직교하면 모든 $c_n = 0$ 이 될 것이다). 이러한 문제를 피하기 위해 추후의 논의에서 직교 집합은 **완비되었다 (complete)**고 가정한다. 이는 집합의 각 요소에 직교하는 유일한 연속 함수는 0 함수 (zero function) 만임을 의미한다.

12.2. Fourier Series

앞 절에서 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 직교하는 실함수 집합이고 f 가 같은 구간에서 정의되는 함수이면, f 를 직교 급수 $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots$ 와 같이 정규적으로 전개할 수 있음을 배웠다. 이 절에서는 함수를 특별한 삼각함수들의 직교집합의 관점에서 전개할 수 있음을 알아보자.

□ Trigonometric Series

12.1절의 연습문제 12에서 다음의 삼각함수 집합

$$\left\{1, \cos \frac{\pi}{p} x, \cos \frac{2\pi}{p} x, \cos \frac{3\pi}{p} x, \dots, \sin \frac{\pi}{p} x, \sin \frac{2\pi}{p} x, \sin \frac{3\pi}{p} x, \dots\right\} \quad (1)$$

은 구간 $[-p, p]$ 에서 직교함을 보였다. 이 집합은 추후 선형 편미분방정식을 포함하는 어떤 종류의 경계값 문제를 푸는데 특별한 중요성을 가진다. 그러한 응용에서는 $[-p, p]$ 에서 정의된 함수 f 를 식 (1)의 삼각함수들을 포함하는 직교급수로 전개할 필요가 있다. 즉,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right) \quad (2)$$

계수 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ 는 앞 절에서 행했던 방법과 정확하게 같은 방식으로 구할 수 있다. 집합 (1)의 1의 계수는 a_0 가 아닌 $a_0 / 2$ 로 표기했는데, 이는 단지 $n = 0$ 에서 a_n 의 공식이 a_0 으로 간단히 표기되는 편의를 위함이다. 식 (2)의 양변을 $-p$ 에서 p 까지 적분하면

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi}{p} x dx + b_n \int_{-p}^p \sin \frac{n\pi}{p} x dx \right) \quad (3)$$

$\cos(n\pi x / p), \sin(n\pi x / p), n \geq 1$ 은 구간에서 1에 직교하므로 식 (3)은 다음처럼 단순화된다.

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p = pa_0$$

따라서
$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx \quad (4)$$

이제 식 (2)에 $\cos(m\pi x / p)$ 를 곱하고 적분하면

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{m\pi}{p} x dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx + b_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx \right) \end{aligned} \quad (5)$$

직교성에 의하여

$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x dx = 0, \quad m > 0$ 이고, $\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx = 0$ 이다. 또한

$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$ 이므로 식 (5)는 아래와 같이 줄어든다.

$$\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx = a_n p$$

따라서
$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx \quad (6)$$

마지막으로, 식 (2)에 $\sin(m\pi x/p)$ 를 곱하고 적분하고, 다음을 이용하면

$$\int_{-p}^p \sin \frac{m\pi}{p} x dx = 0, \quad m > 0 \quad \int_{-p}^p \sin \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx = 0$$

$$\int_{-p}^p \sin \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx \quad (7)$$

식 (4), (6), (7)로 정의되는 계수 a_0, a_n, b_n 을 가지는 식 (2)의 삼각급수를 함수 f 의 **푸리에 급수 (Fourier series)**라고 한다. 식 (4), (6), (7)의 계수들은 함수 f 의 **푸리에 계수 (Fourier coefficients)**라고 한다. 계수들을 구하는 데 있어서 f 는 구간에서 적분가능하고, 식 (2)와 식 (2)에 $\cos(m\pi x/p)$ 를 곱해 얻어지는 급수들이 항별 적분이 가능한 형태로 수렴한다고 가정하였다. 요약은 다음과 같다.

Definition 12.2.1. Fourier Series

구간 $(-p, p)$ 에서 정의된 함수 f 의 **푸리에 급수 (Fourier series)**는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right) \quad (8)$$

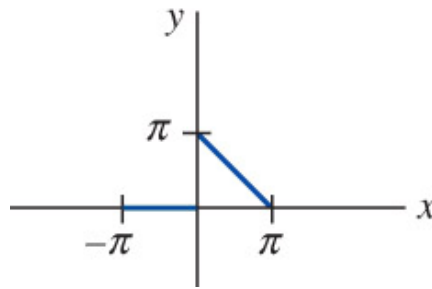
$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx \quad (10)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx \quad (11)$$

[Example 1]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (12) \text{ 를 푸리에 급수로 전개하라.}$$



Sol. 주어진 함수의 그래프는 그림 12.2.1과 같다. $p = \pi$ 이며 식 (9), (10)으로부터

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[(\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2 \pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \end{aligned}$$

같은 방식으로 식 (11)으로부터 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx = \frac{1}{n}$ 이다. 따라서

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right\} \quad (13) \quad \blacksquare$$

정의 12.2.1의 계수식 중 식 (10)의 a_n 에 $n=0$ 을 대입하면 식 (9)의 a_0 의 식과 같아지므로 식 (9)를 굳이 따로 쓸 필요가 없어 보이지만, 위 예제 1의 경우에서 보여지는 것처럼 a_n 을 구하기 위한 적분을 한 0 후에 이것이 적용되지 않는 경우도 있음에 유의하라.

□ Convergence of a Fourier Series

아래 정리는 푸리에 급수가 한 점에서 수렴하기 위한 충분조건이다.

Theorem 12.2.1. Conditions for Convergence

f 와 f' 이 구간 $[-p, p]$ 에서 부분적으로 연속; 즉 f 와 f' 이 구간 내의 유한한 수의 점을 제외하고 연속이고 이 점들에서만 유한한 불연속성을 가진다고 하자. 그러면 구간 $(-p, p)$ 내의 모든 x 에 대해 f 의 푸리에 급수는 연속점에서 $f(x)$ 에 수렴한다. 불연속점에서는, 푸리에 급수는 평균값

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

에 수렴한다. 여기서 $f(x+)$ 와 $f(x-)$ 는 각각 점 x 에서의 f 의 우극한값과 좌극한값이다.

[Example 2]

예제 1 문제의 식 (12)는 정리 12.2.1을 만족한다. 따라서 $x = 0$ 을 제외한 구간 $(-\pi, \pi)$ 내의 모든 x 에 대해 급수 (13)은 $f(x)$ 에 수렴한다. $x = 0$ 에서는 함수는 불연속이므로 급수 (13)은 다음 평균값에 수렴한다.

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

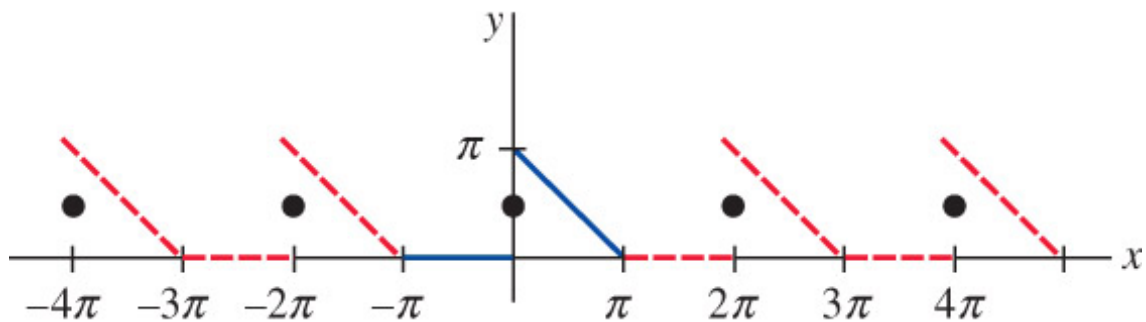
□ Periodic Extension

기본 집합 (1)의 함수들은 각각 서로 다른 기본주기(fundamental period); 즉 $2p/n$, $n \geq 1$ 을 가진다. 그러나 주기의 양의 정수배 역시 주기이므로 집합 (1)의 모든 함수들은 공통주기 $2p$ 를 가진다. 따라서 식 (2)의 우변은 $2p$ 만큼 주기적이다; 실제 $2p$ 는 급수의 기본 주기이다. 이로부터 푸리에 급수는 구간 $(-p, p)$ 에서의 함수를 표현할 뿐만 아니라, 이 구간 밖에서 함수 f 의 **주기적 확장(periodic extension)**을 준다고 결론지을 수 있다. 이제 정리 12.2.1을 f 의 주기적 확장에 적용할 수 있고, 또는 처음부터 주어진 함수가 주기 $T = 2p$ 를 가지는 주기함수; 즉 $f(x + T) = f(x)$ 라고 가정할 수 있다. f 가 부분적으로 연속이고 $x = -p$, $x = p$ 에서 각각 좌편도함수와 우편도함수를 가질 때, 급수 (8)은 이 끝점들에서 평균값 $[f(p-) + f(p+)]/2$ 에 수렴하고 이 값들은 주기적으로 $\pm 3p$, $\pm 5p$, $\pm 7p$ 점들에 대해서도 확장된다.

예제 1의 푸리에 급수 식 (13)은 전체 x 축 상에서 함수 (12)의 주기적 확장에 수렴한다. $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 과 $\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ 에서 이 급수는 각각 다음 값

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0$$

에 수렴한다. 그림 12.2.2에 f 의 주기적 연장의 그림을 나타냈다.

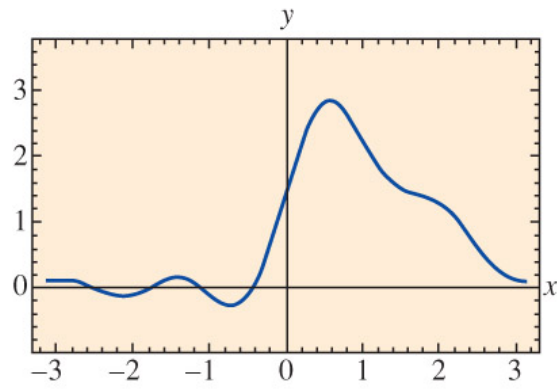


□ Sequence of Partial Sums

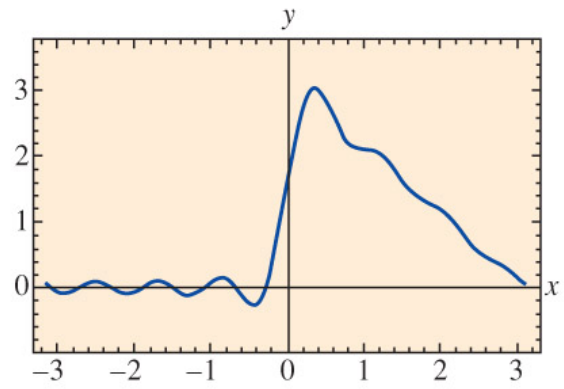
푸리에 급수의 부분합 $\{S_N(x)\}$ 의 수열들이 어떻게 함수에 근사화되는지를 살펴보는 것은 매우 흥미있는 일이다. 예를 들어 예제 1, 식 (13)의 첫 3개의 부분합은

$$S_1(x) = \frac{\pi}{4}, \quad S_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x, \quad S_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

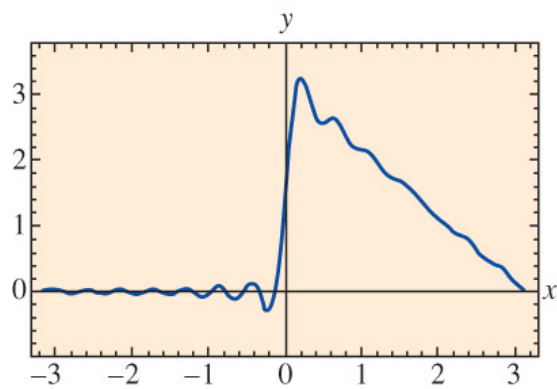
와 같이 변화한다. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 식 (13)의 $S_5(x)$, $S_8(x)$, $S_{15}(x)$ 의 부분합을 구간 $(-\pi, \pi)$ 에서 그린 것을 그림 12.2.3에 나타냈다. 급수의 부분합이 증가하면서 급수가 점차 주어진 함수식 (12)의 모양과 유사해지는 것을 볼 수 있다.



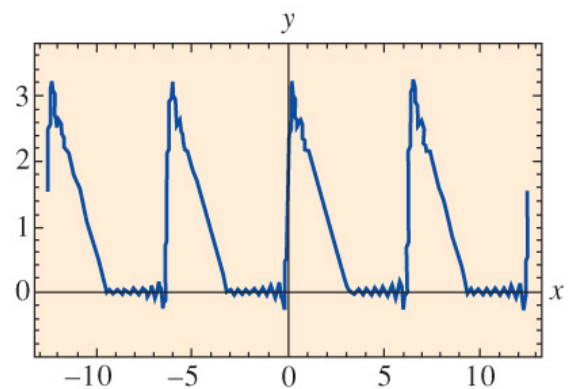
(a) $S_5(x)$ on $(-\pi, \pi)$



(b) $S_8(x)$ on $(-\pi, \pi)$



(c) $S_{15}(x)$ on $(-\pi, \pi)$



(d) $S_{15}(x)$ on $(-4\pi, 4\pi)$