Topic.09
선형계획법: 민감도 분석

퀴즈 T09

- 퀴즈 #17
- 퀴즈 #18
- 퀴즈 #19
- 퀴즈 #20

그래프 방법 (최대화 문제)

민감도 분석 (Sensitivity Analysis)

- 선형계획 모델의 여러 가지 투입 파라미터가 변할 때 최적해 및 목적함수 값이 어떤 영향을 받는지를 연구하는 분야
- 최적해가 구해진 이후에 수행하므로 사후분석 (postoptimality analysis)이라고도 함
- 기업 경영이 동태적 환경에서 이루어지기 때문에 수요량, 가격, 자원 등에 관한 자료가 단기간 내 상당히 변화할 수 있으며, 이와 같이 변화할 수 있는 자료에 입각하여 구한 최적해가 입력자료의 변화에 얼마나 민감한가를 검토하는 것은 매우 중요함

최적해에 영향을 미치는 변화

- 목적함수 계수의 변화 (c_j)
  - 최적범위 (range of optimality)
- 기술계수의 변화 (a_{ij})
- 우변상수의 변화 (b_i)
  - 잠재가격(shadow price)
  - 실행가능범위(range of feasibility)
- 새로운 제약조건식의 추가
- 새로운 결정변수의 추가

- <본 강의에서는 **c_j와 b_i의 변화**가 최적해에 미치는 영향에 대해서만 다룸>

민감도 분석 방법

- 그래프 방법
- 심플렉스법
- Excel 해법

- <본 강의에서는 **그래프 방법**과 Excel **해법** 만을 다룸>

목적함수 계수의 변화

- 목적함수 계수의 변화는 목적함수 값과 해의 최적성에 영향을 끼침
- 목적함수 계수가 변화하더라도 제약조건식에는 아무런 영향을 주지 않기 때문에 실행가능성(feasibility, 가해영역)에는 영향을 끼치지 않음

목적함수 계수의 변화

- 평화전자(주) 문제

$$max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2$$
$$s.t.$$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$ (비속박제약조건식)

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$ (속박제약조건식)

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$ (속박제약조건식)

④ $x_1, x_2 \geq 0$

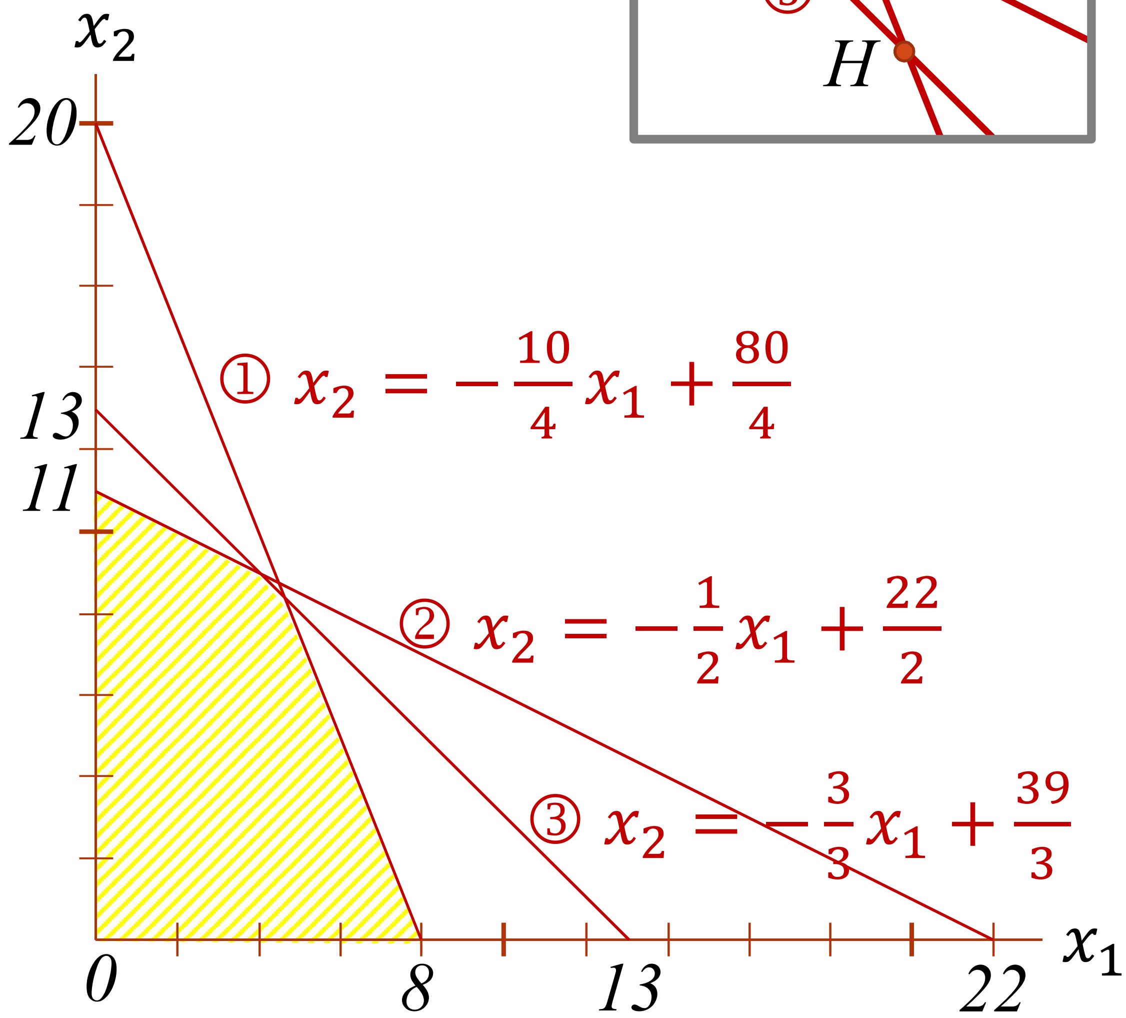
목적함수 계수의 변화

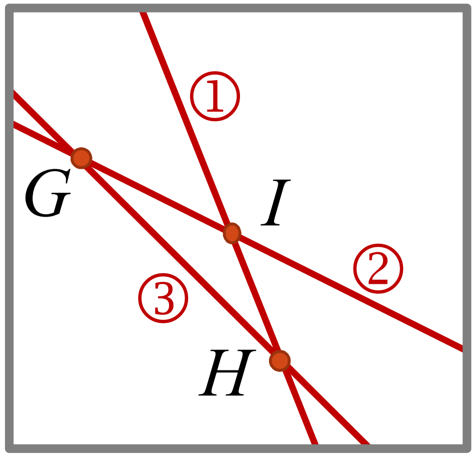
① $10x_1 + 4x_2 \le 80$

② $1x_1 + 2x_2 \le 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \le 39$

④ $x_1, x_2 \ge 0$





목적함수 계수의 변화

- 목적함수의 기울기 $-\frac{6}{7}$은 두 속박제약조건식 ③과 ②의 기울기인 $-\frac{3}{3}$과 $-\frac{1}{2}$의 사이에 존재함

목적함수 계수의 변화

$max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2$

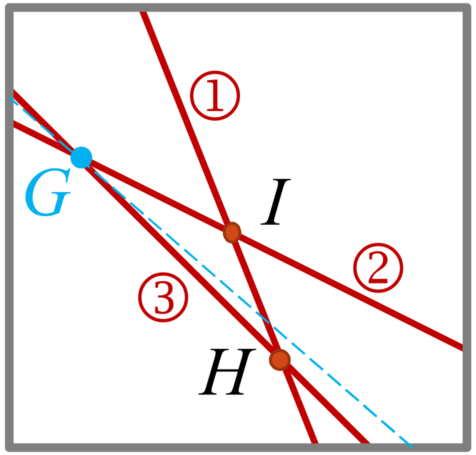
$Z = 6x_1 + 7x_2$

$x_2 = -\frac{6}{7}x_1 + \frac{Z}{7}$

G = (4, 9)

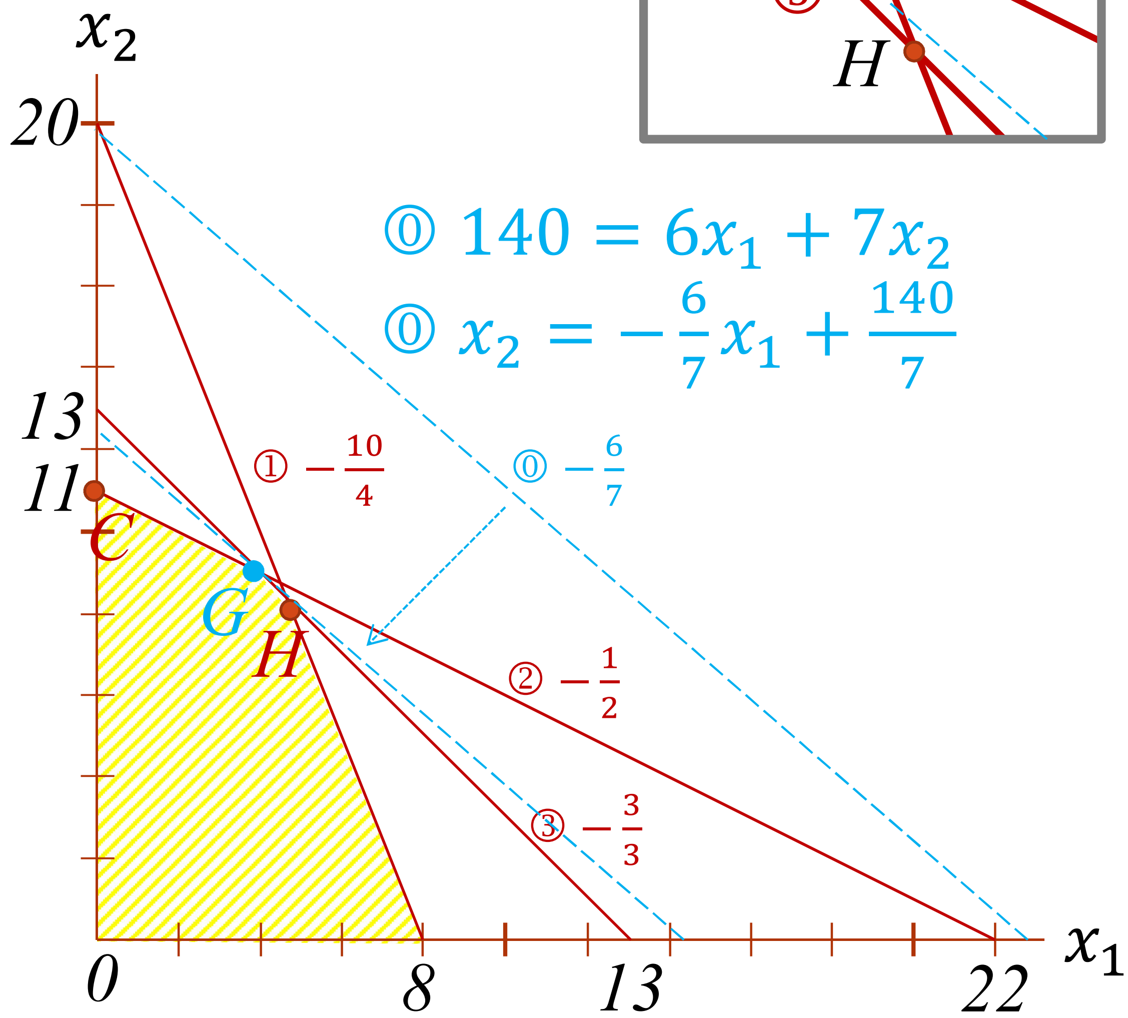
* 기울기:

$-\frac{10}{4} < -\frac{3}{3} < -\frac{6}{7} < -\frac{1}{2} < 0$



⓪ $140 = 6x_1 + 7x_2$

⓪ $x_2 = -\frac{6}{7}x_1 + \frac{140}{7}$



목적함수 계수의 변화

- 목적함수식의 기울기가 변화하더라도 $-\frac{3}{3}$과 $-\frac{1}{2}$ 사이에만 있으면 최적해는 변함없이 점 G임
  - $-\frac{3}{3} <$ 목적함수식의 기울기 $< -\frac{1}{2}$

목적함수 계수의 변화

$$max\ \ Z = C_1x_1 + C_2x_2$$

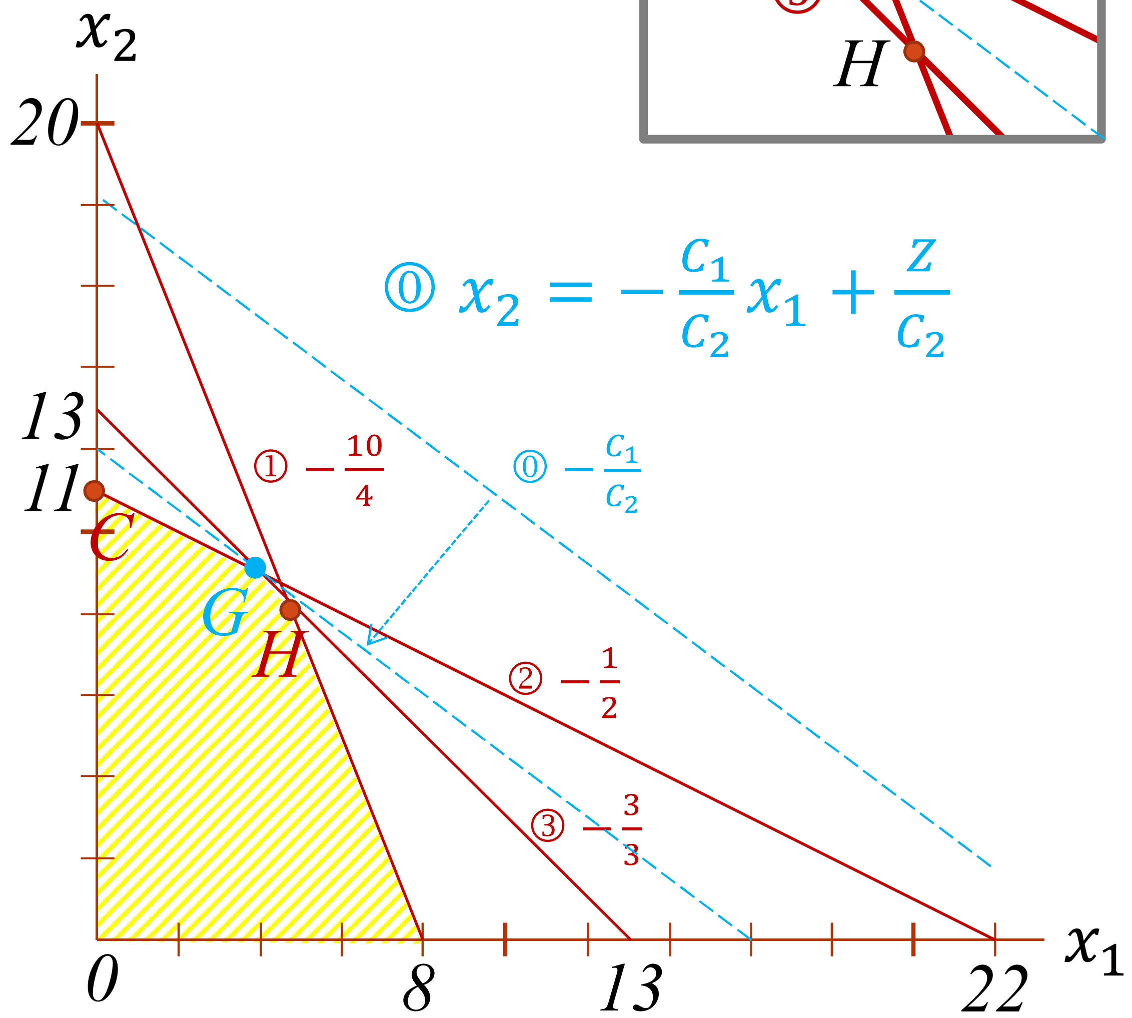
$$Z = C_1x_1 + C_2x_2$$

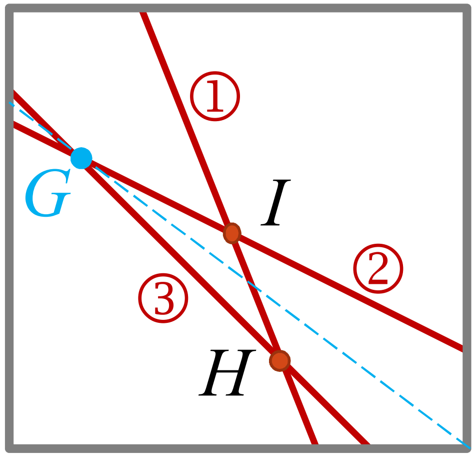
$$x_2 = -\frac{C_1}{C_2}x_1 + \frac{Z}{C_2}$$

G = (4, 9)

* 기울기:

$$-\frac{10}{4} < -\frac{3}{3} < -\frac{C_1}{C_2} < -\frac{1}{2} < 0$$





목적함수 계수의 변화

- 만약, 목적함수식의 기울기가 $-1 (= -\frac{3}{3})$보다 작아지면 점 H가 최적해점으로 바뀜
  - $-\frac{10}{4} <$ 목적함수식의 기울기 $< -\frac{3}{3}$

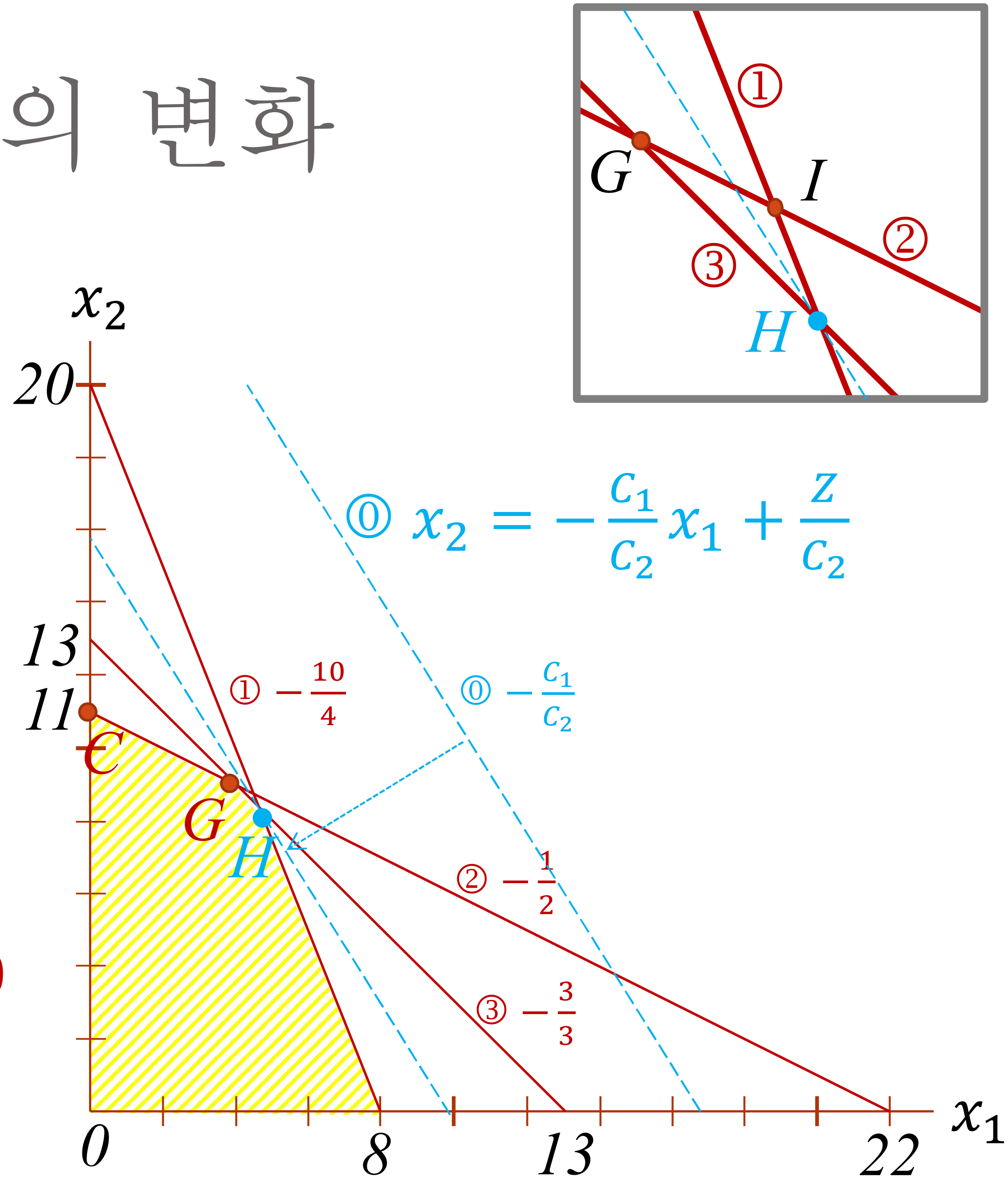
목적함수 계수의 변화

$$max\ \ Z = C_1x_1 + C_2x_2$$
$$Z = C_1x_1 + C_2x_2$$
$$x_2 = -\frac{C_1}{C_2}x_1 + \frac{Z}{C_2}$$

$$\text{H} = (\frac{14}{3}, \frac{25}{3})$$

* 기울기:

$$-\frac{10}{4} < -\frac{C_1}{C_2} < -\frac{3}{3} < -\frac{1}{2} < 0$$



목적함수 계수의 변화

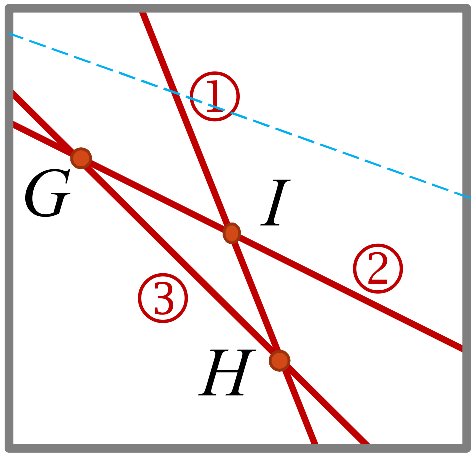
- 만약, 목적함수식의 기울기가 $-\frac{1}{2}$보다 커지면 점 C가 최적해점으로 바뀜
  - $-\frac{1}{2} <$ 목적함수식의 기울기 < 0

목적함수 계수의 변화

$$\max\ Z = C_1x_1 + C_2x_2$$

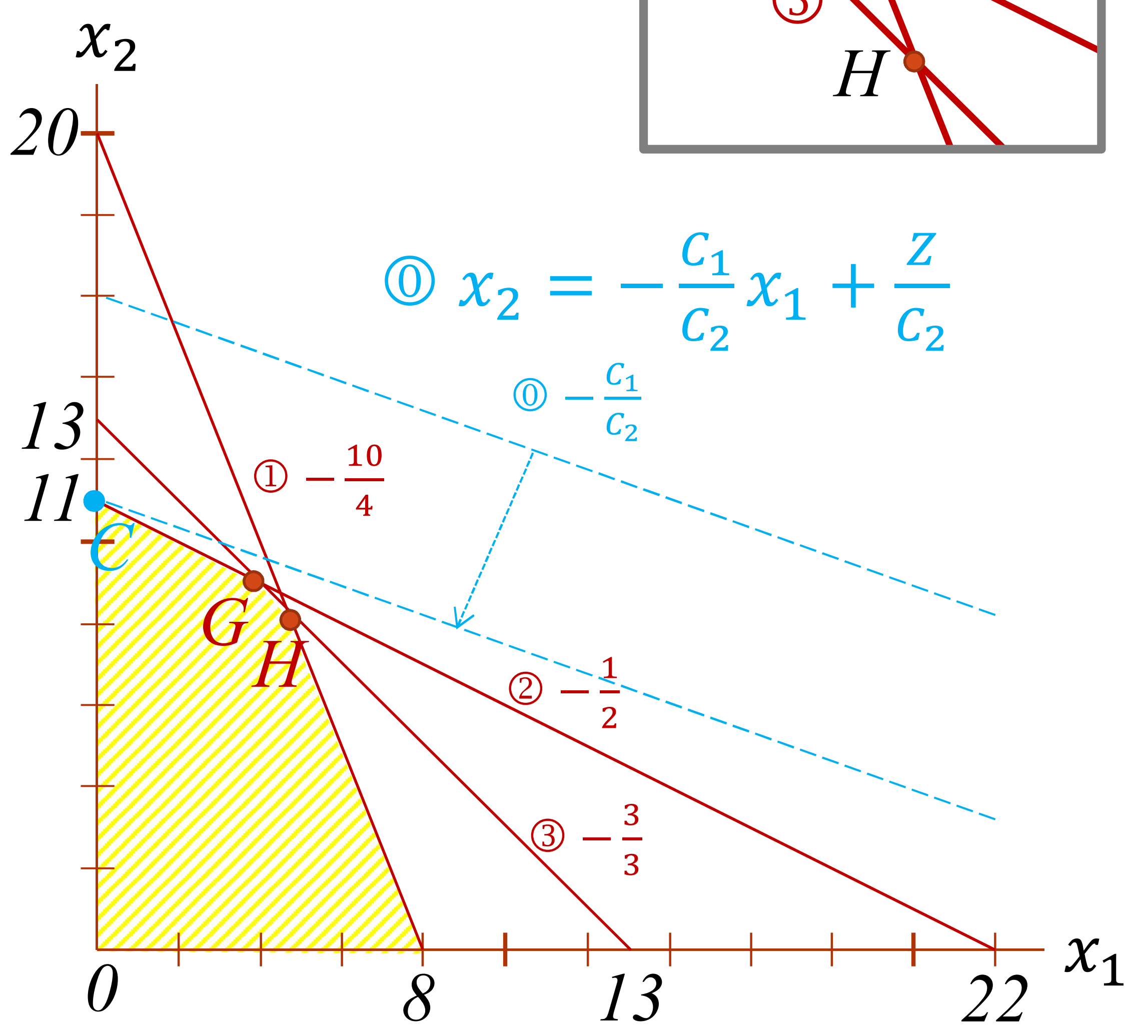
$$Z = C_1x_1 + C_2x_2$$

$$x_2 = -\frac{C_1}{C_2}x_1 + \frac{Z}{C_2}$$



⓪ $x_2 = -\frac{C_1}{C_2}x_1 + \frac{Z}{C_2}$

C = (0, 11)



* 기울기:

$$-\frac{10}{4} < -\frac{3}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{C_1}{C_2} < 0$$

목적함수 계수의 변화: 최적범위 (Range of Optimality)

- 현재의 최적해를 변하지 않게 하면서, 어떤 결정변수의 목적함수 계수가 변화할 수 있는 범위
  - 어떤 결정변수의 목적함수 계수가 그의 최적범위 내에서 변화하는 한 현재의 최적해(결정변수의 최적값)는 변함이 없고, 다만 목적함수의 값만 변함
  - 어떤 결정변수의 목적함수 계수가 그의 최적범위를 벗어나게 되면 목적함수의 값은 물론 최적해도 변함
    - 이 경우, 모델을 다시 풀어 새로운 최적해를 구해야 함
- 결정변수 x_1의 목적함수 계수 C_1의 최적범위:
  - $-\frac{3}{3} < -\frac{C_1}{7} < -\frac{1}{2}$ ➔ $3.5 < C_1 < 7$
  - 결정변수 x_1의 계수(단위당 이익)는 현재 6인데, 3.5에서 7 사이에서 변화하는 한 현재의 최적해 (x_1, x_2) = (4, 9)는 변함이 없음
    - 단, 목적함수 값은 변화함
    - E.g. $C_1 = 6$에서 $C_1 = 5$로 변화하면, Z = 87에서 Z = 83으로 변화함
- 결정변수 x_2의 목적함수 계수 C_2의 최적범위:
  - $-\frac{3}{3} < -\frac{6}{C_2} < -\frac{1}{2}$ ➔ $6 < C_2 < 12$

목적함수 계수의 변화: 최적범위 (Range of Optimality)

- C_1
  - $-\frac{3}{3} < -\frac{C_1}{7} < -\frac{1}{2}$
  - $\frac{3}{3} > \frac{C_1}{7} > \frac{1}{2}$
  - $7 > C_1 > \frac{7}{2}$

- C_2
  - $-\frac{3}{3} < -\frac{6}{C_2} < -\frac{1}{2}$
    - $-\frac{3}{3} < -\frac{6}{C_2}$
      - $-C_2^2 < -6C_2$
      - $C_2^2 - 6C_2 > 0$
      - $C_2(C_2 - 6) > 0$
      - $(C_2 < 0)\ OR\ (C_2 > 6)$
    - $-\frac{6}{C_2} < -\frac{1}{2}$
      - $-6C_2 < -\frac{1}{2}C_2^2$
      - $\frac{1}{2}C_2^2 - 6C_2 < 0$
      - $C_2^2 - 12C_2 < 0$
      - $C_2(C_2 - 12) < 0$
      - $0 < C_2 < 12$
  - $\big((C_2 < 0)\ OR\ (C_2 > 6)\big)\ AND\ (0 < C_2 < 12)$
  - $6 < C_2 < 12$

하브루타 (Quiz #17, 18)

- 최적범위 (Range of Optimality)를 설명하시오.

팀 과제: 평화전자(주)

- 모든 종업원이 1주일에 월요일부터 금요일까지 매일 앞 문제와 동일한 시간을 근무한다고 할 때, 이익을 최대화 하기 위해 **1주일에 각 모델을 얼마씩 생산**하여야 하는지 최적해를 구하시오. **단, 창고에 저장된 생산 제품은 매일 일과 후 반출된다고 한다.**
  - C_1과 C_2에 대한 최적범위를 구하시오.

$$
\begin{aligned}
& max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 10x_1 + 4x_2 \le 400 \\
& \qquad 1x_1 + 2x_2 \le 110 \\
& \qquad 3x_1 + 3x_2 \le 195 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 모든 종업원이 1주일에 월요일부터 금요일까지 매일 앞 문제와 동일한 시간을 근무한다고 할 때, 이익을 최대화 하기 위해 **1주일에 각 모델을 얼마씩 생산**하여야 하는지 최적해를 구하시오. **단, 창고에 저장된 생산 제품은 매주 토요일 주별 생산이 완료된 후 반출된다고 한다.**
  - C_1과 C_2에 대한 최적범위를 구하시오.

$$
\begin{aligned}
&max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 10x_1 + 4x_2 \le 400 \\
&\qquad 1x_1 + 2x_2 \le 110 \\
&\qquad 3x_1 + 3x_2 \le 39 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 종업원 교육을 통해 모든 종업원이 조립 및 검사가 가능하게 되었다. 이때, 최적해를 구하시오.
  - C_1과 C_2에 대한 최적범위를 구하시오.

$$
\begin{aligned}
& max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 11x_1 + 6x_2 \le 102 \\
& \qquad 3x_1 + 3x_2 \le 39 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 종업원 교육에 문제가 있어 검사만 하던 종업원은 조립도 가능하나, 조립만 하던 종업원은 검사는 못하는 것으로 밝혀졌다. 이때, 최적해를 구하시오.
  - c_1과 c_2에 대한 최적범위를 구하시오.

$$\max\ Z = 6x_1 + 7x_2$$
$$s.t.$$
$$11x_1 + 6x_2 \leq 102$$
$$10x_1 + 4x_2 \leq 80$$
$$1x_1 + 2x_2 \leq 102$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 39$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 종업원 교육에 문제가 있어 조립만 하던 종업원은 검사도 가능하나, 검사만 하던 종업원은 조립은 못하는 것으로 밝혀졌다. 이때, 최적해를 구하시오.
  - c_1과 c_2에 대한 최적범위를 구하시오.

$$
\begin{aligned}
&max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 11x_1 + 6x_2 \le 102 \\
&\qquad 10x_1 + 4x_2 \le 102 \\
&\qquad 1x_1 + 2x_2 \le 22 \\
&\qquad 3x_1 + 3x_2 \le 39 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

팀 과제: 연습문제 3.02

- 다음과 같은 모델이 주어졌을 때 물음에 답하라.

$$
\begin{aligned}
&max\ \ Z = 4x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 3x_1 + 1x_2 \le 12 \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 \le 16 \\
&\qquad 1x_1 - 1x_2 \le 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

  - 최적해를 구하라.
  - C_1과 C_2에 대한 최적범위를 구하라.

- 목적함수가 $max\ Z = 9x_1 + 2x_2$ 일 때는 어떻게 되는가?
- 목적함수가 $max\ Z = 2x_1 - 4x_2$ 일 때는 어떻게 되는가?

우변상수의 변화

- 현재의 최적해의 실행가능성(feasibility)에 영향을 미치지 않고 (불가능해로 바꾸지 않고) 특정 제약조건식의 우변상수(b_i)가 얼마까지 변화(증감)할 수 있는지 결정
- 속박제약조건식의 우변상수냐 비속박제약조건식의 우변상수냐에 따라 분석이 다름

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- 평화전자(주) 문제

$$\max\ Z = 6x_1 + 7x_2$$
$$s.t.$$

① $10x_1 + 4x_2 \le 80$ (비속박제약조건식)
② $1x_1 + 2x_2 \le 22$ (속박제약조건식)
③ $3x_1 + 3x_2 \le 39$ (속박제약조건식)
④ $x_1, x_2 \ge 0$

- ②와 ③이 속박제약조건식이기 때문에 이들 제약조건식의 우변상수가 조금만 변화하더라도 최적해점이 이동하여 최적해와 목적함수 값이 변화하게 됨
- 속박제약조건식에 대해서는 잠재가격(shadow price)과 실행가능범위(range of feasibility)를 계산할 수 있음

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- 잠재가격(shadow price, 그림자 가격, marginal value, 한계가치, imputed cost, 부여원가)
  - 실행가능범위 내에서 제약조건식의 우변상수(b_i)가 1단위 증가할 때 초래하는 목적함수 값의 증가를 말함
- E.g. 평화전자(주)
  - b_2를 22에서 23으로 바꾼 후 최적해를 구하면:
    - 연립방정식
      - $1x_1 + 2x_2 = 23$
      - $3x_1 + 3x_2 = 39$
    - 으로부터, 최적해와 목적함수 값은:
      - $(x_1, x_2) = (3, 10)$
      - $Z = 6x_1 + 7x_2 = 6(3) + 7(10) = 88$
  - b_2가 1단위 증가함에 따라 목적함수 값이 87에서 88로 1만원 증가하였음
  - 이 1만원을 ② 제약조건식의 자원 1단위(1 시간)의 잠재가격이라고 함
    - 단, b_2가 실행가능범위 내에서 변할 때에 한함

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- 평화전자(주) 문제에서 사용가능한 자원(80시간의 조립시간, 22시간의 검사시간, 39ft^3의 저장공간)에 대해 이미 비용을 지불(잠수비용, sunk[en] cost)한 것으로 보는 경우
  - 잠재가격은 관리자가 추가로 자원 1단위를 구입할 때 기꺼이 지불하고자 하는 최고가격(maximum price)이 됨
  - E.g. 검사인력 자원 1단위를 추가로 구입할 때 관리자는 기꺼이 1만원까지 지불할 수 있음
- 평화전자(주) 문제에서 검사시간의 사용가능한 시간(22시간 및 23시간)에 따른 원가가 모델 1과 모델 2의 단위당 이익 계산에 이미 포함(포함비용, included cost)되어 있다고 보는 경우
  - 잠재가격은 관리자가 추가로 자원 1단위를 구입하기 위하여 자원의 시장가격(정상비용) 이상으로 기꺼이 지불하고자 하는 프리미엄 가격(premium price)이 됨
  - E.g. 검사인력 자원 1단위를 추가로 구입할 때, 기꺼이 (검사인력 자원 1단위의 시장가격 + 1만원)까지 가격을 지불할 수 있음

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- E.g. 평화전자(주)
  - b_3를 39에서 38으로 바꾼 후 최적해를 구하면:
    - 연립방정식
      - $1x_1 + 2x_2 = 22$
      - $3x_1 + 3x_2 = 38$
    - 으로부터, 최적해와 목적함수 값은:
      - $(x_1, x_2) = (3\frac{1}{3}, 9\frac{1}{3})$
      - $Z = 6x_1 + 7x_2 = 6(3\frac{1}{3}) + 7(9\frac{1}{3}) = 85\frac{1}{3}$
  - b_3가 1단위 감소함에 따라 목적함수 값이 87에서 $85\frac{1}{3}$로 $1\frac{2}{3}$ 감소하였음
  - ③ 제약조건식의 자원 1단위(1 ft^3)의 잠재가격은 $1\frac{2}{3}$ 만원임
    - 단, b_3가 실행가능범위 내에서 변할 때에 한함

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- 잠재가격의 계산은 속박제약조건식의 우변상수가 실행가능범위(range of feasibility) 내에서 변화(증가 또는 감소)할 때 타당함
  - 즉, 속박제약조건식이 계속 속박제약조건식으로 유지되는 경우에 한함
- 속박제약조건식 우변상수의 실행가능범위의 결정
  - 속박제약조건식의 직선에 맞추어 자를 놓는다.
  - 이 자를 직선에 평행시키면서 원점으로부터 멀리 이동한다. 두 속박제약조건식이 속박제약조건식으로 유지되면서 다른 속박제약조건식과 마지막으로 교차하는 점의 좌표를 구한다. (상한)
  - 이 자를 직선에 평행시키면서 원점을 향하여 이동한다. 두 속박제약조건식이 속박제약조건식으로 유지되면서 다른 속박제약조건식과 마지막으로 교차하는 점의 좌표를 구한다. (하한)

우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

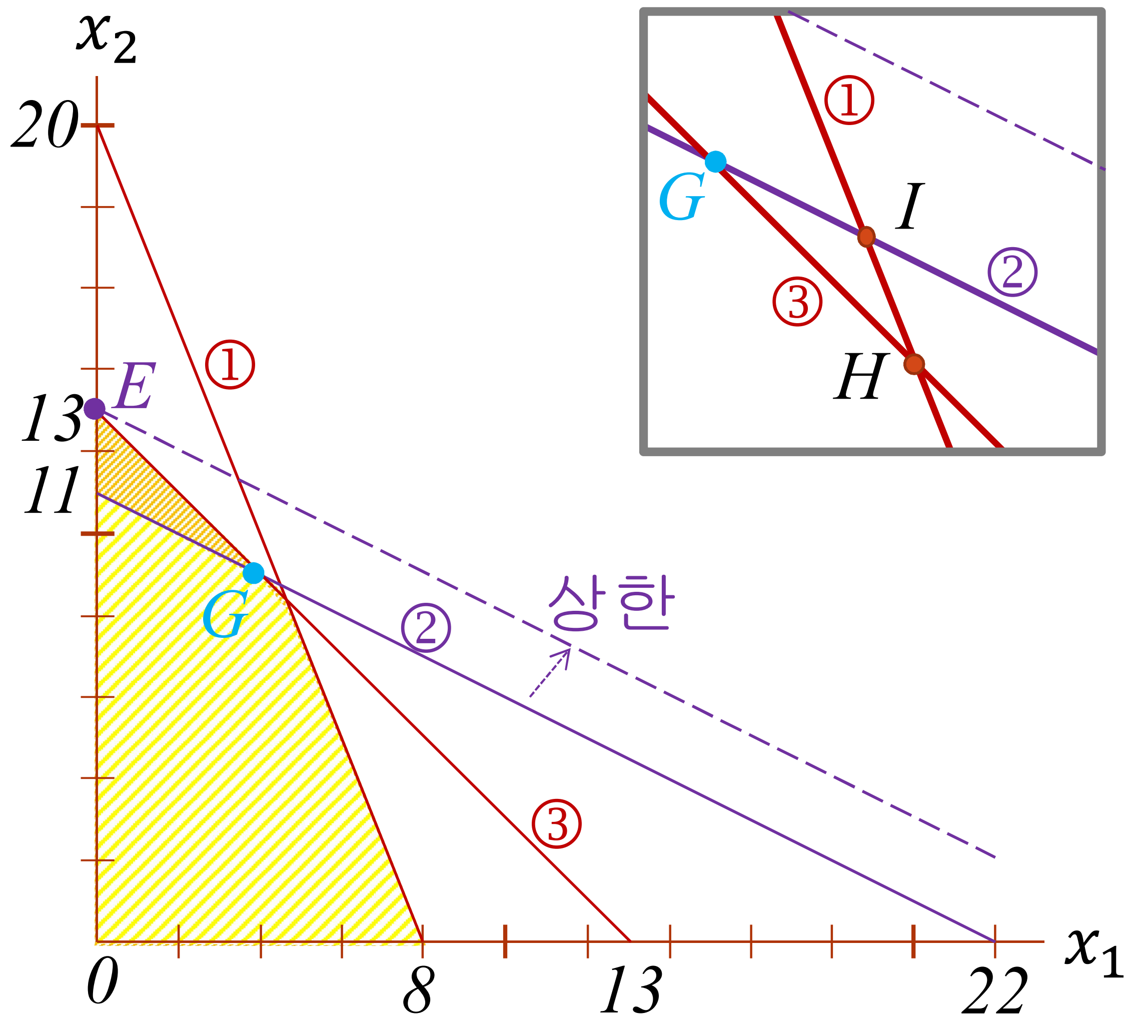
① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

E = (0, 13)



우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

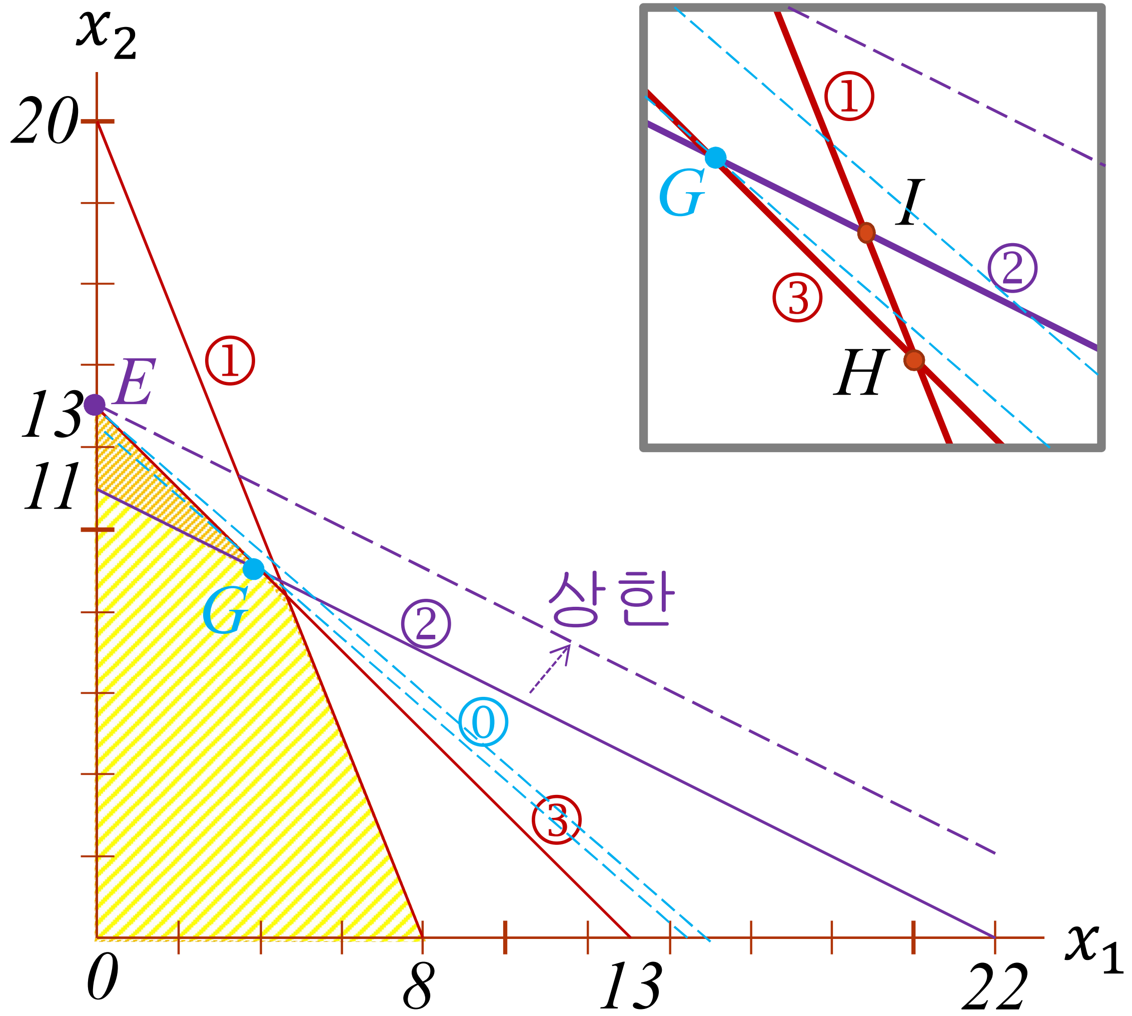
① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

E = (0, 13)



우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

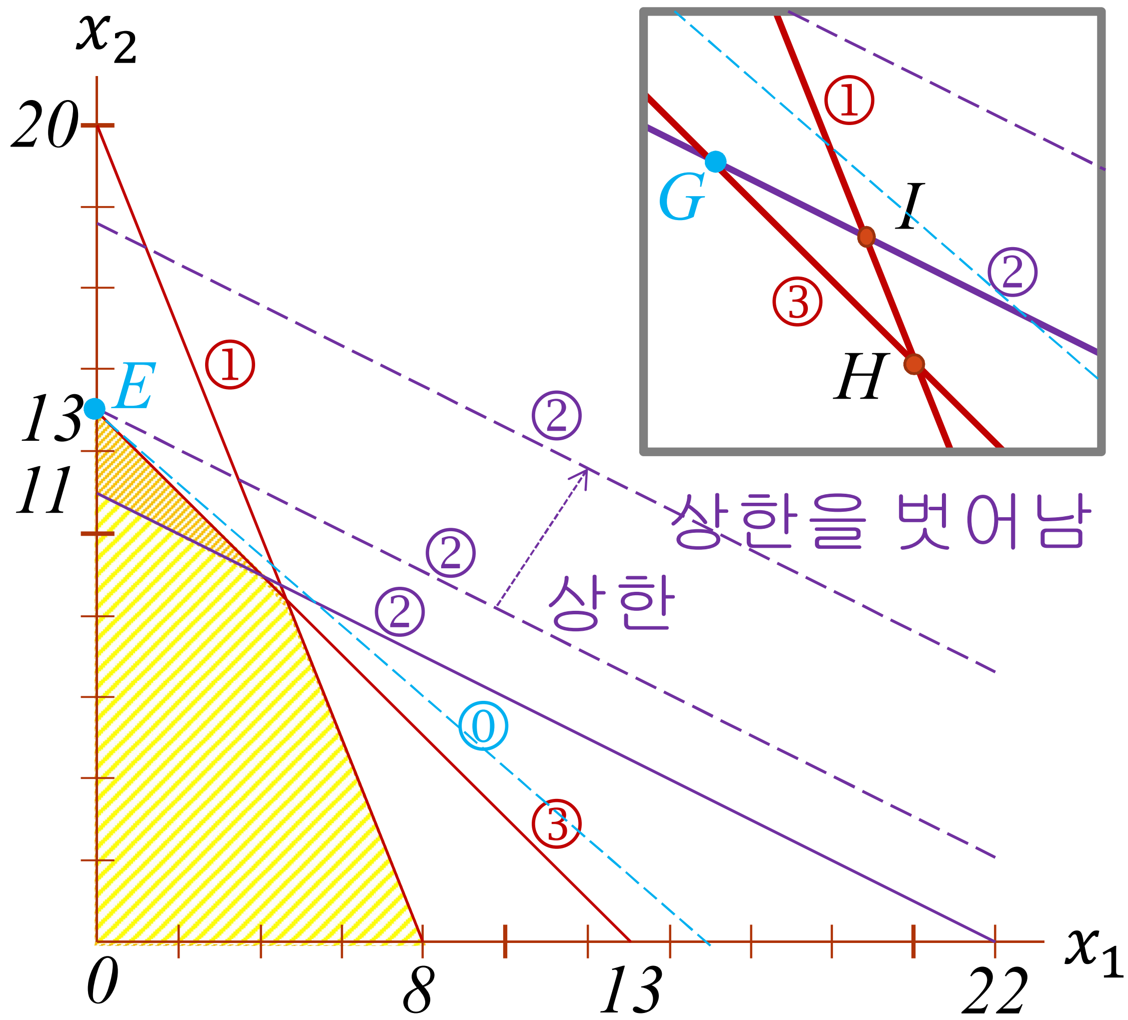
① $10x_1 + 4x_2 \le 80$

② $1x_1 + 2x_2 \le 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \le 39$

④ $x_1, x_2 \ge 0$

- ②가 상한 이상으로 벗어나면 ③만 속박제약조건식으로 남음



우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

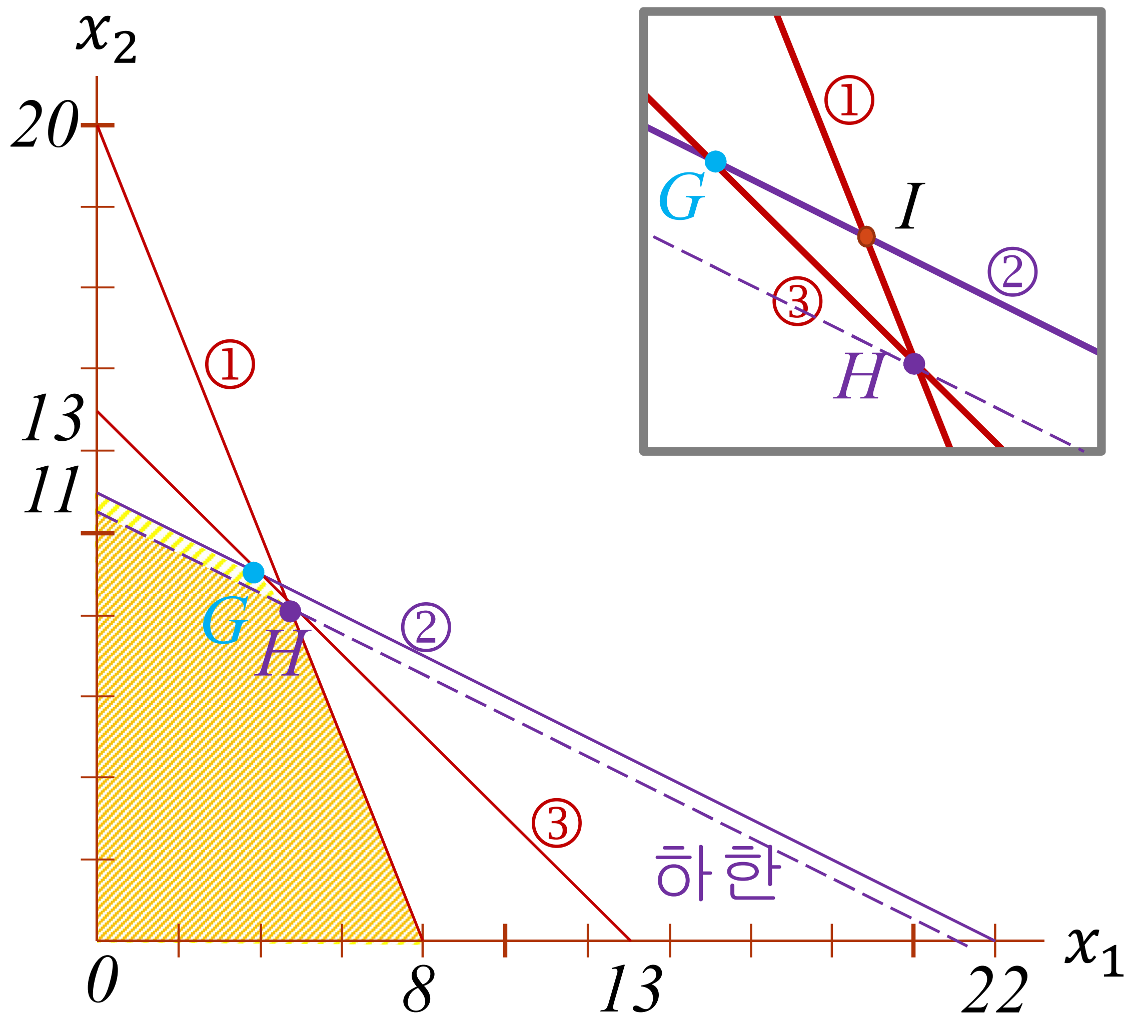
① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

$\mathrm{H} = (\frac{14}{3}, \frac{25}{3})$



우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

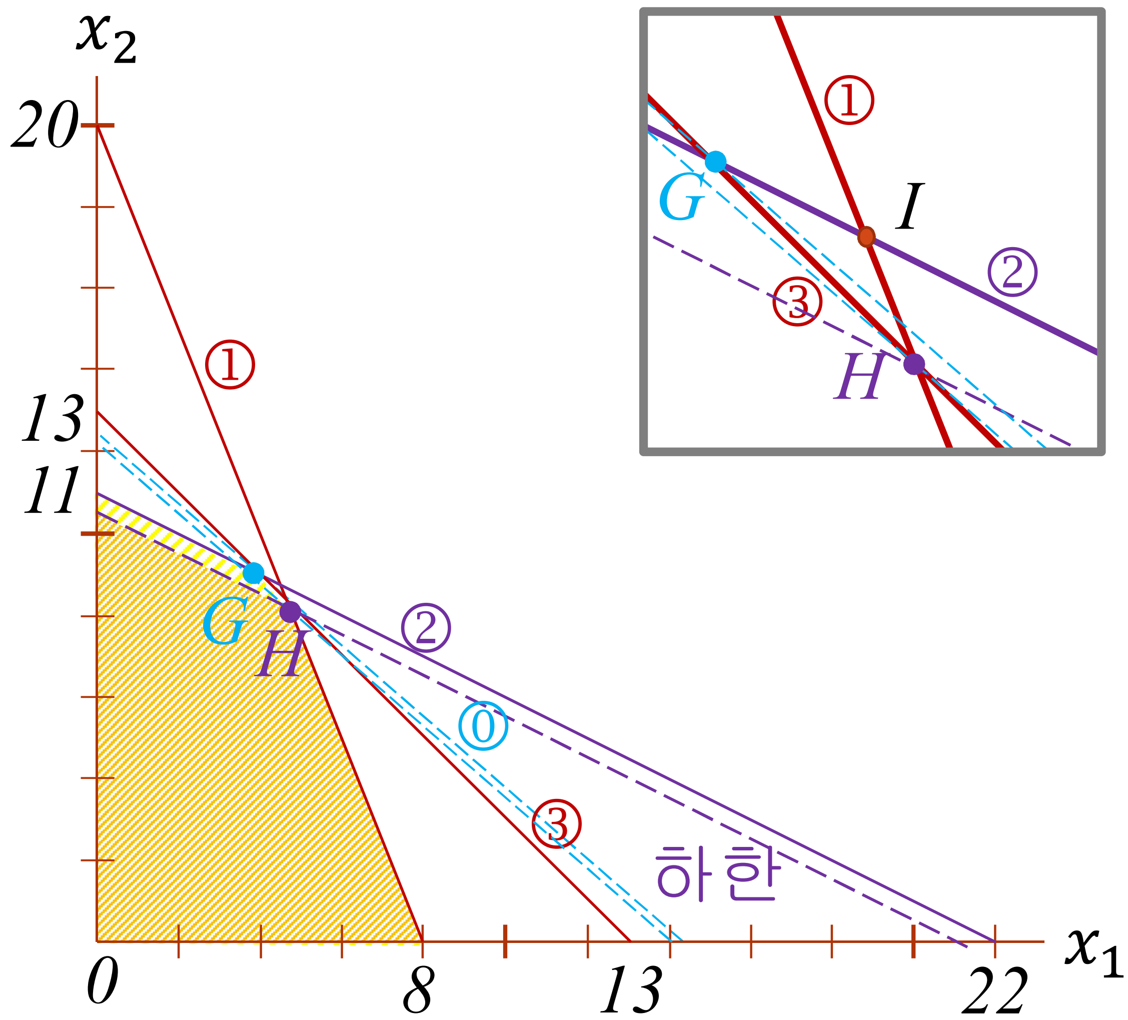
① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{H} = (\frac{14}{3}, \frac{25}{3})$



우변상수의 변화: 속박제약조건식

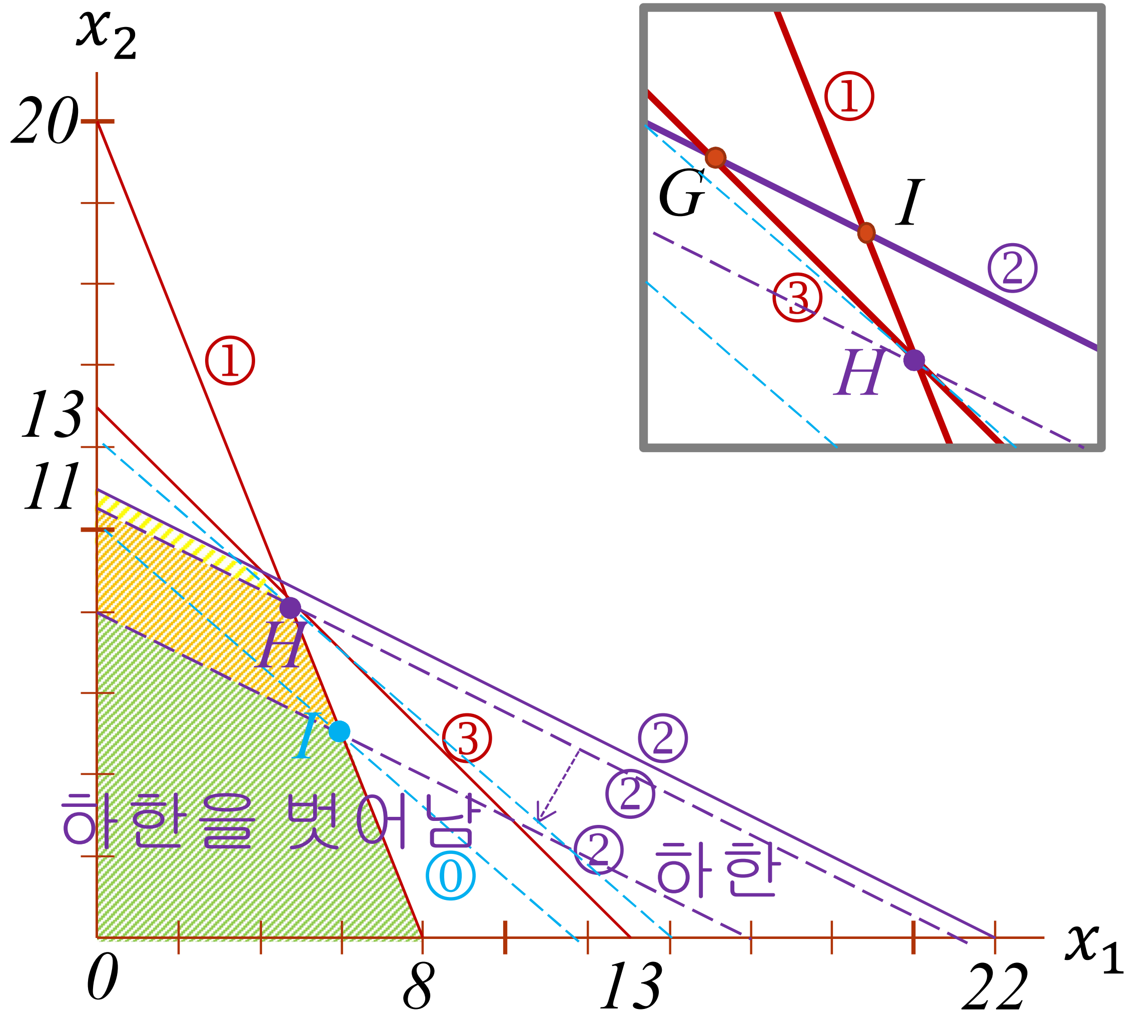
⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$



- ②가 하한 이하로 벗어나면 ①과 ②가 속박제약조건식으로 바뀜

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- ② $1x_1 + 2x_2 \le 22$
  - E → $1x_1 + 2x_2$ = 1(0) + 2(13) = 26 (상한)
  - H → $1x_1 + 2x_2$ = 1($\frac{14}{3}$) + 2($\frac{25}{3}$) = $21\frac{1}{3}$ (하한)
  - →
  - ② 제약조건식 우변상수(b_2)의 실행가능범위
    - $21\frac{1}{3} \le b_2 \le 26$
    - ② 제약조건식의 우변상수는 현재 22인데, $21\frac{1}{3}$부터 26 사이에서 변화하는 한 최적해의 값에는 영향을 미치지만 최적해의 실행가능성에는 영향을 미치지 않는다.

우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \le 80$

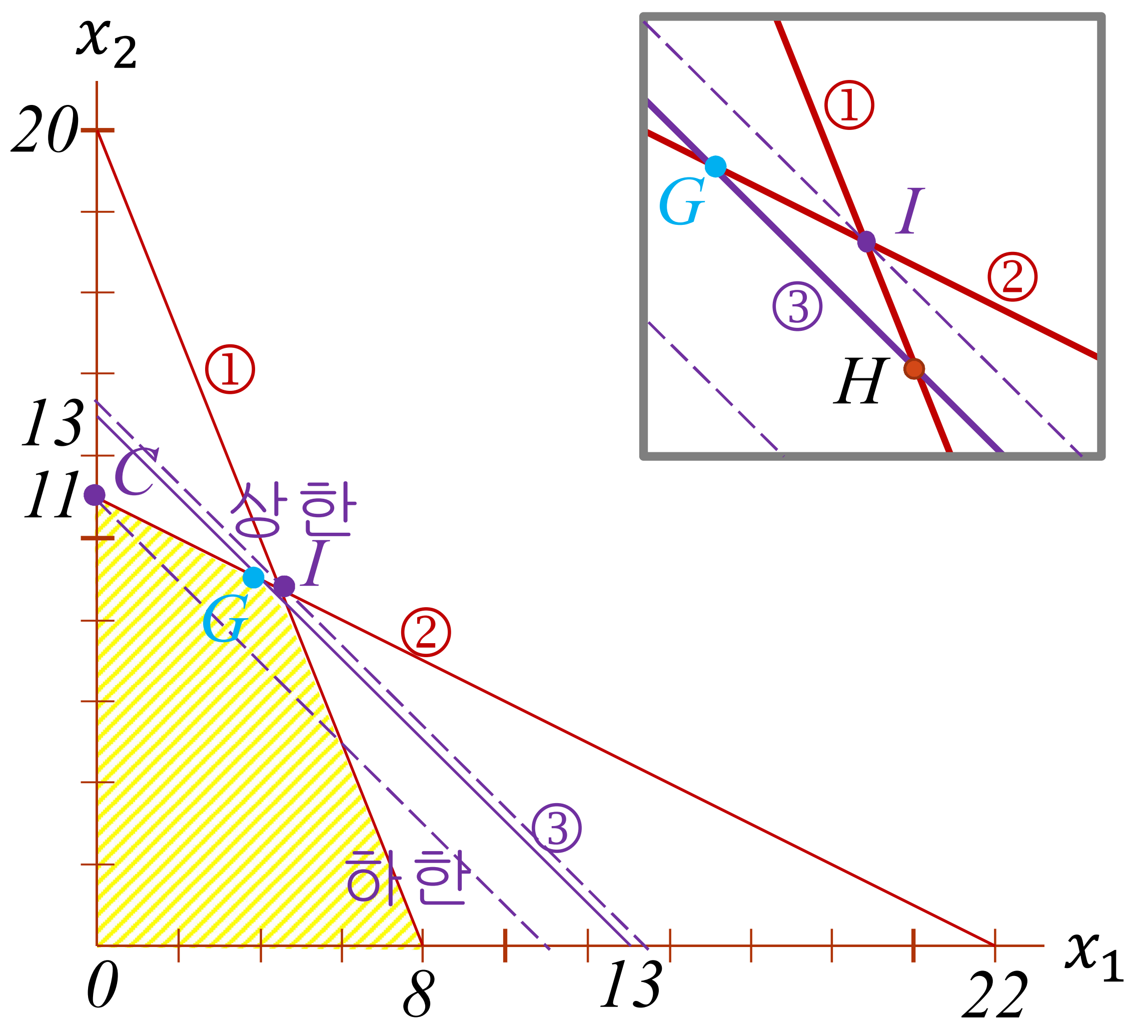
② $1x_1 + 2x_2 \le 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \le 39$

④ $x_1, x_2 \ge 0$

I = (4.5, 8.75)

C = (0, 11)



우변상수의 변화: 속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

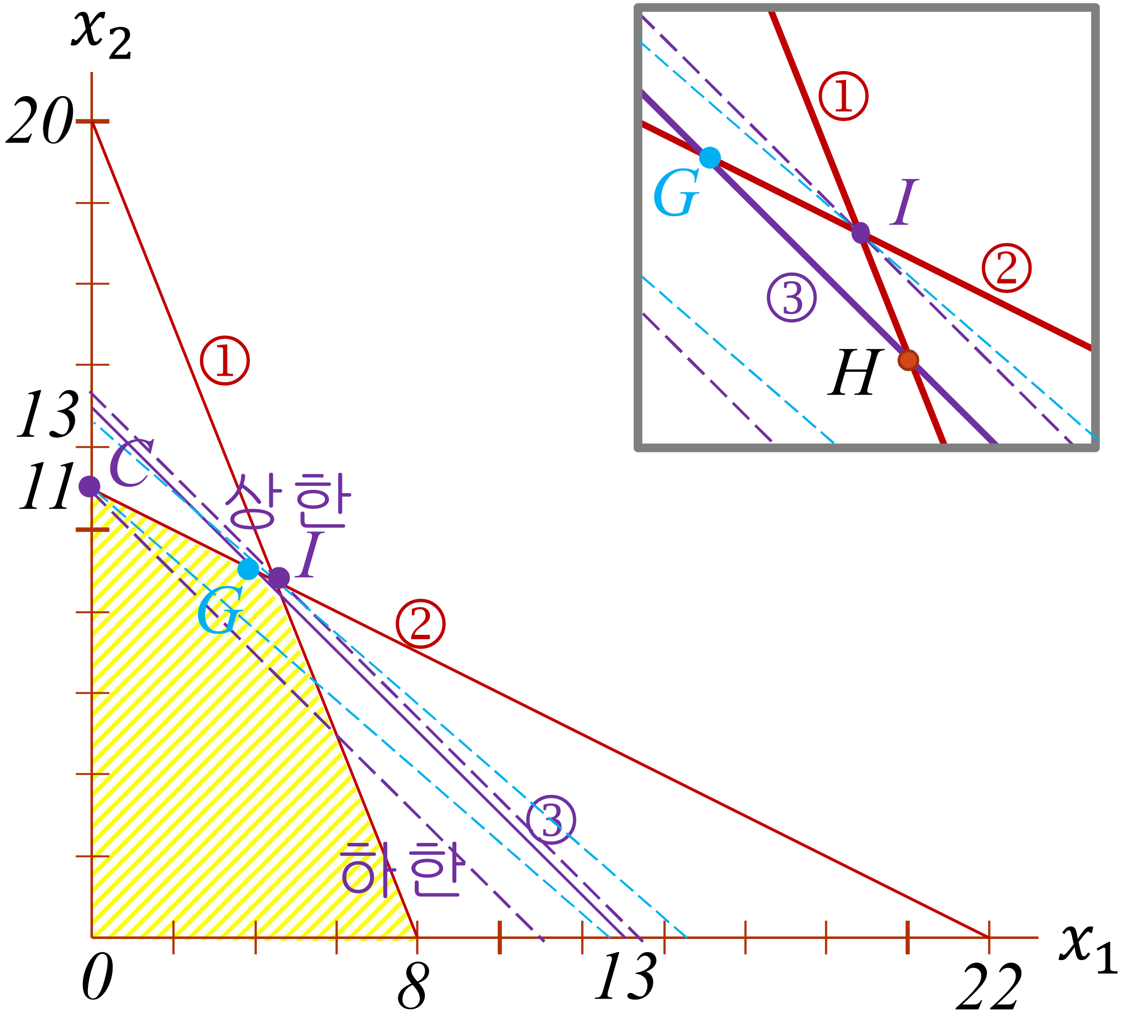
② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

I = (4.5, 8.75)

C = (0, 11)



우변상수의 변화: 속박제약조건식

- ③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$
  - I →$3x_1 + 3x_2$ = 3(4.5) + 3(8.75) = 39.75 (상한)
  - C →$3x_1 + 3x_2$ = 3(0) + 3(11) = 33 (하한)
  - →
  - ③ 제약조건식 우변상수(b_3)의 실행가능범위
    - $33 \leq b_3 \leq 39.75$
    - ③ 제약조건식의 우변상수는 현재 39인데, 33부터 39.75 사이에서 변화하는 한 최적해의 값에는 영향을 미치지만 최적해의 실행가능성에는 영향을 미치지 않는다.

우변상수의 변화: 속박제약조건식

- 속박제약조건식 우변상수의 실행가능범위
    - 속박제약조건식이 계속 속박제약조건식으로 유지되는 우변상수의 변화 범위
- 최대화 문제에서, 속박제약조건식의 우변상수가 실행가능범위를 벗어날 경우
    - 제약조건식의 우변상수가 하한을 벗어나면 새로운 최적해를 구하기 위하여 수정된 문제를 풀어야 하고 잠재가격도 새로이 구해야 한다.
    - 제약조건식의 우변상수가 상한을 벗어나면 상한을 벗어나는 초과분은 미사용자원(slack)이 되고 그의 잠재가격은 0이 된다.
    - 우변상수의 실행가능범위는 잠재가격의 타당범위(valid range)를 나타냄

우변상수의 변화: 비속박제약조건식

- ① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$
  - G → $10x_1 + 4x_2$ = 10(4) + 4(9) = 76
  - 최적해 G에서 ① 조립 공정의 미사용자원은 80 – 76 = 4 (초과능력 상태)
  - 조립 공정은 현재 초과능력을 갖고 있기 때문에 ① 조립 제약조건식에서 우변상수(b_1)의 추가 투입(현재의 80보다 더 많이)은 미사용자원의 증가만 초래함

우변상수의 변화: 비속박제약조건식

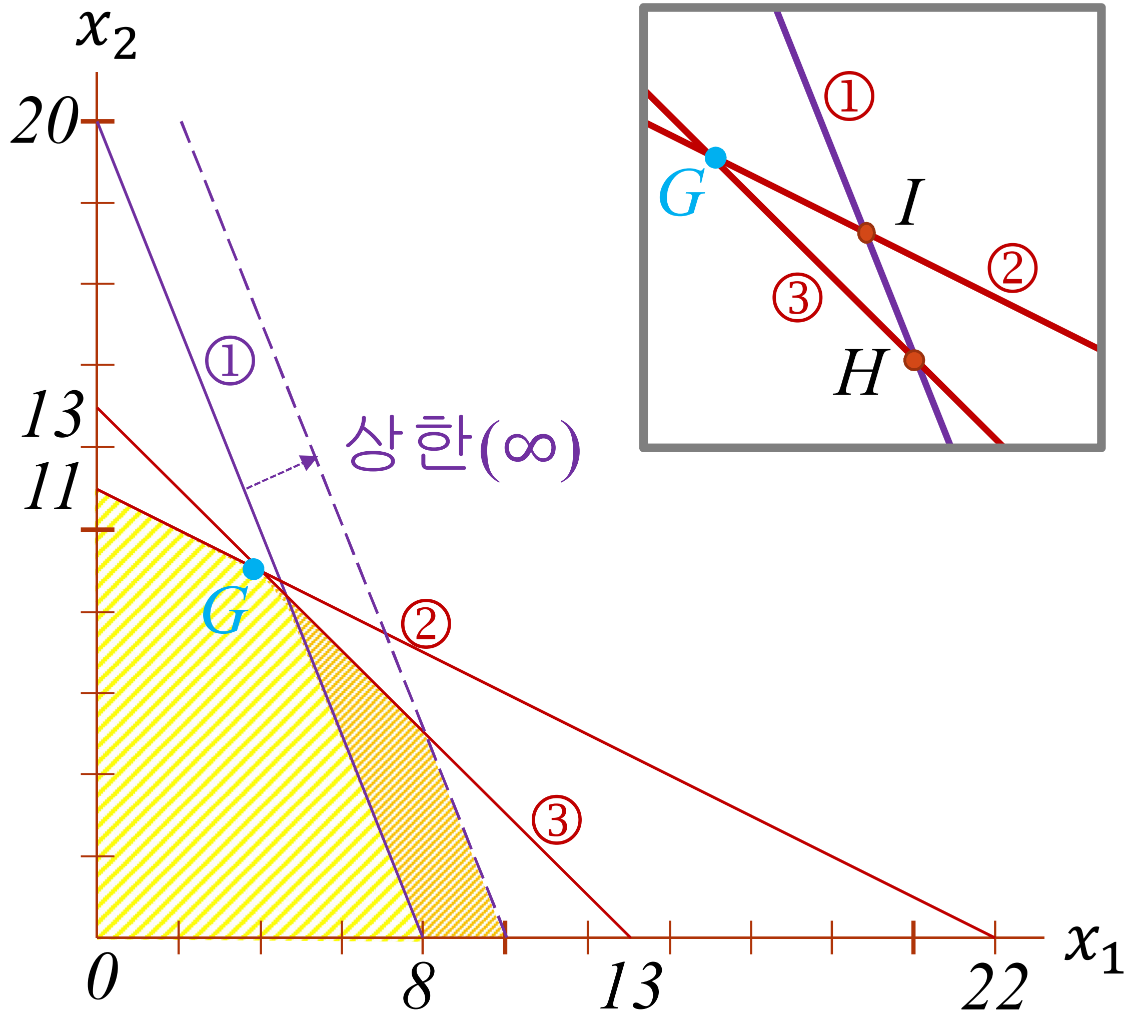
⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$



우변상수의 변화: 비속박제약조건식

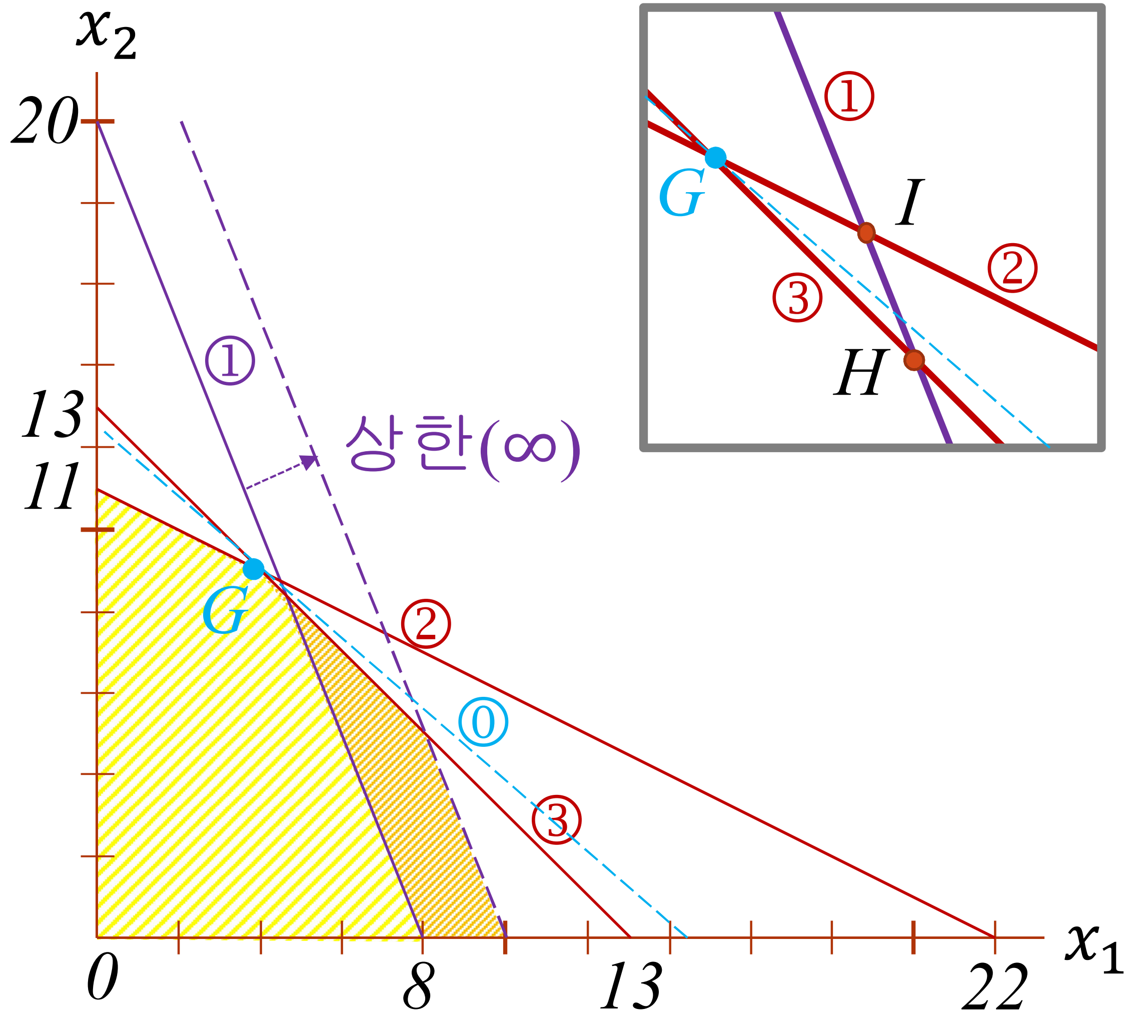
⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$



우변상수의 변화: 비속박제약조건식

- ① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$
  - G → $10x_1 + 4x_2$ = 10(4) + 4(9) = 76
  - 반대로, 자원을 현재의 80으로부터 4보다(76까지) 많이 감소하지 않는 한 최적해에는 영향을 미치지 않음

우변상수의 변화: 비속박제약조건식

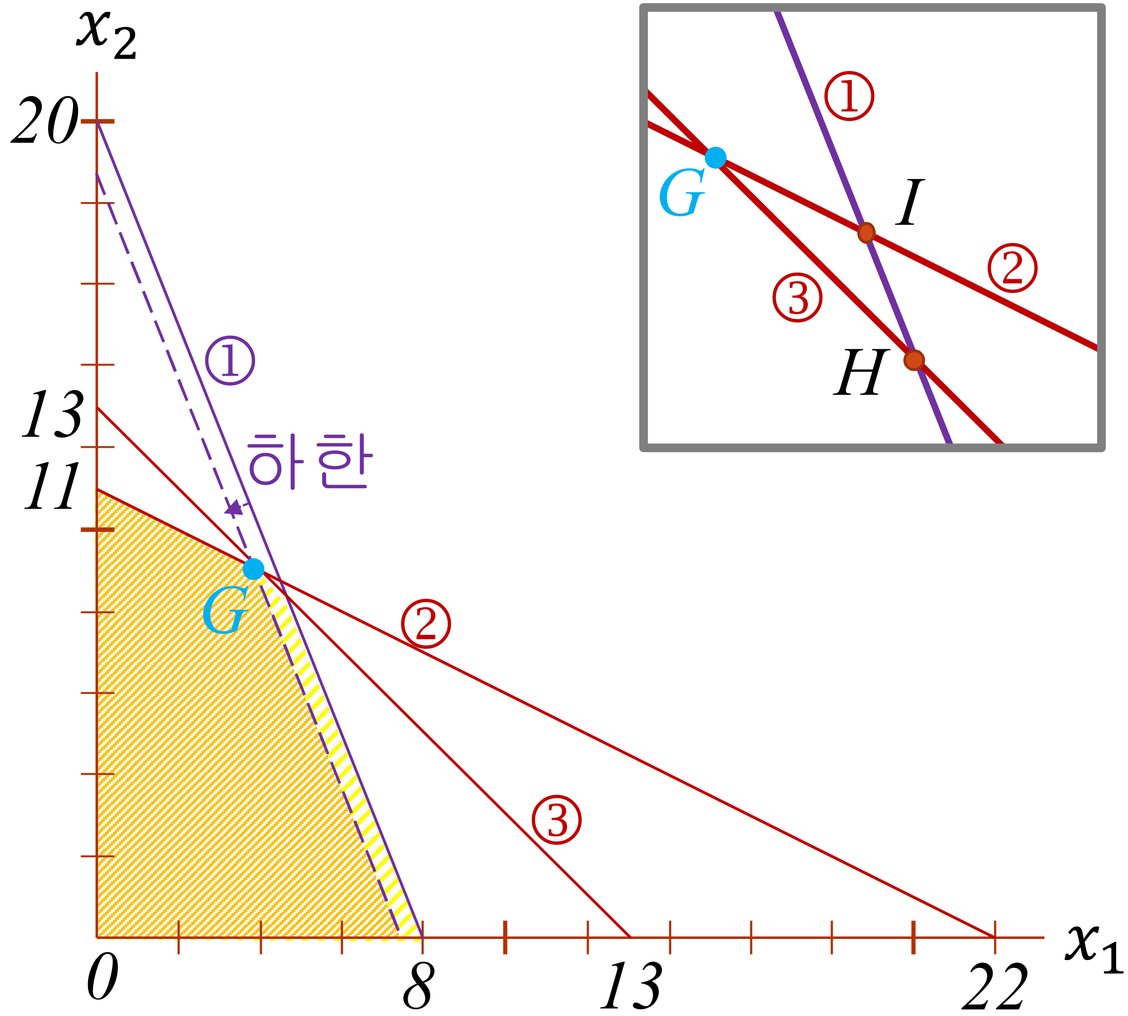
⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$



우변상수의 변화: 비속박제약조건식

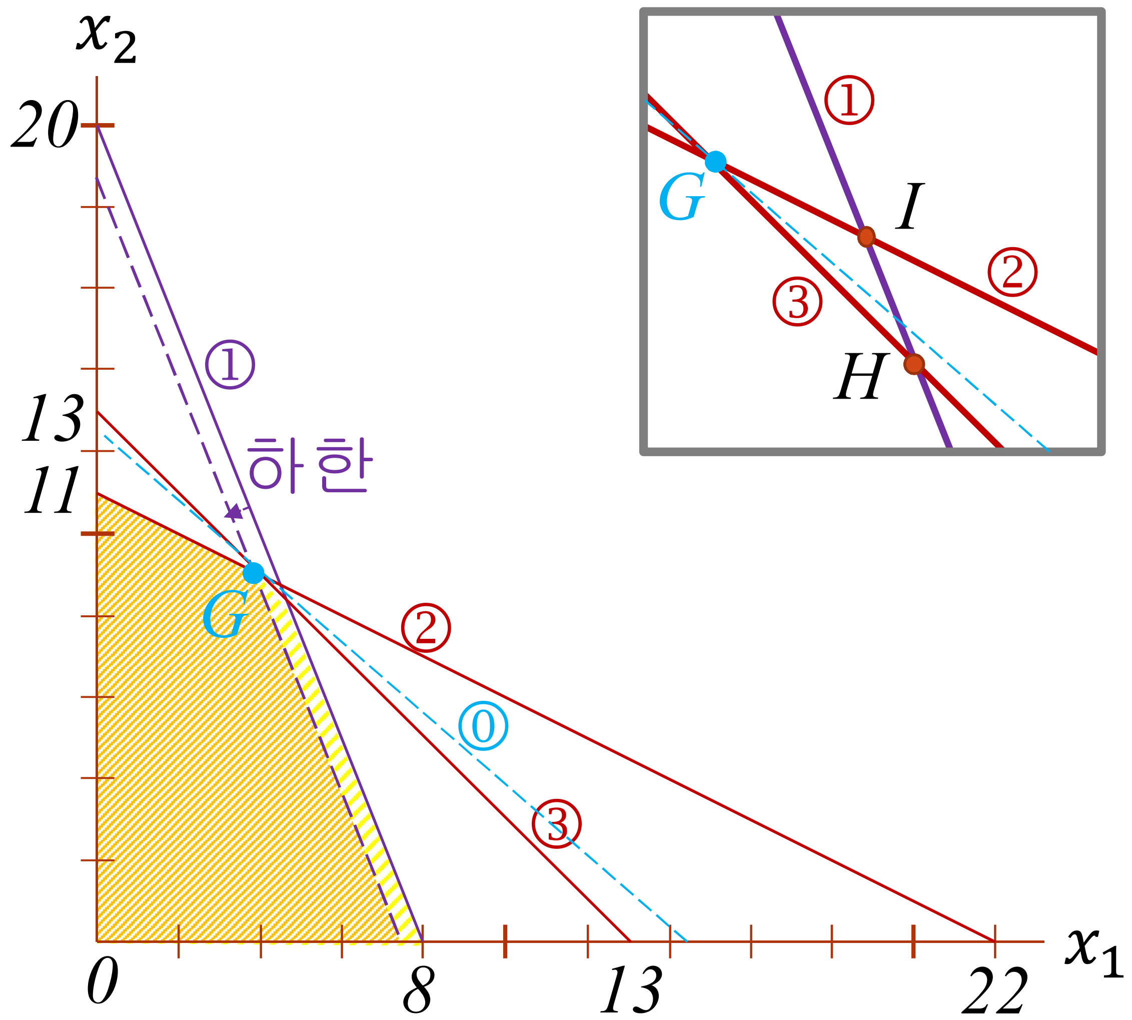
⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$



우변상수의 변화: 비속박제약조건식

⓪ $Z = 6x_1 + 7x_2$

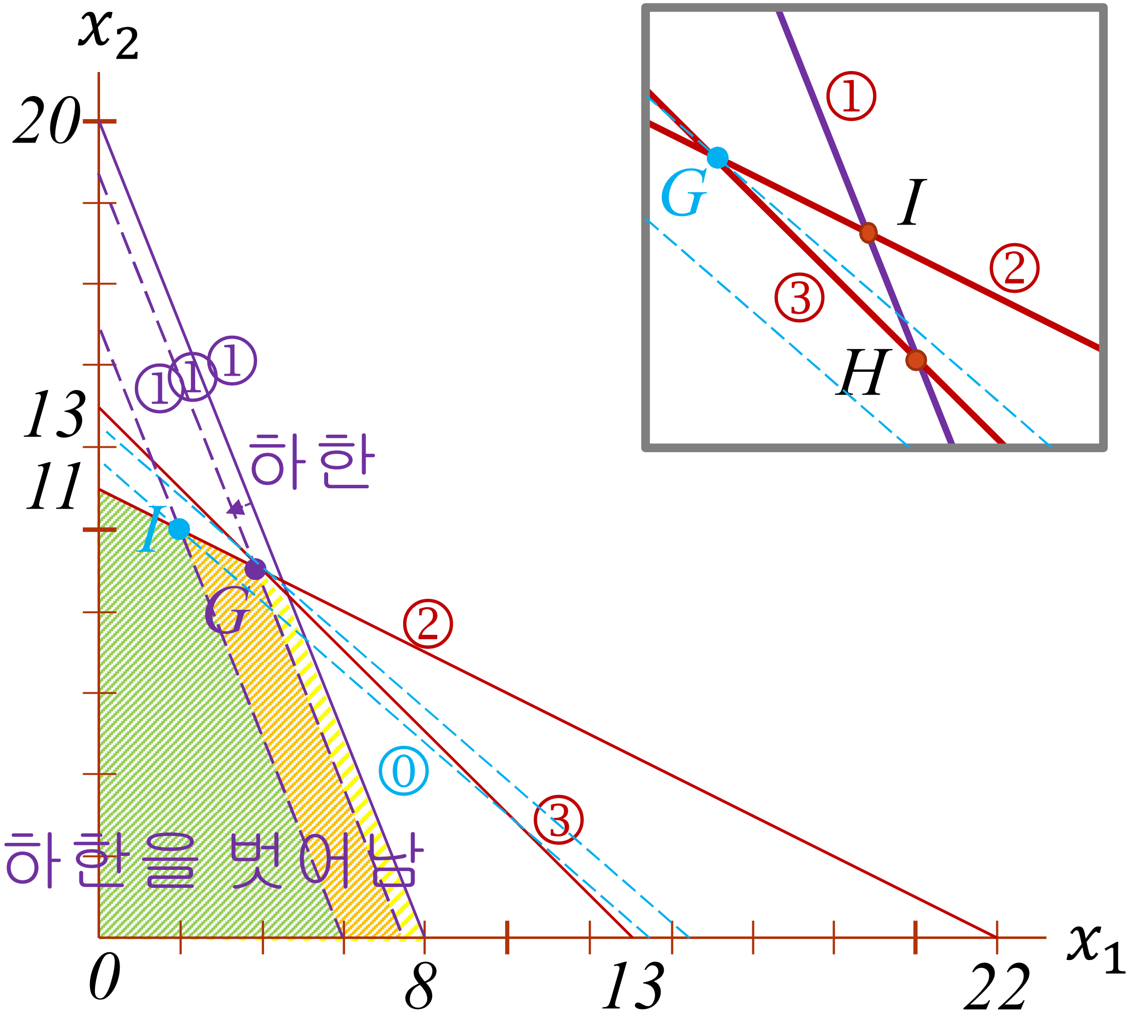
① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$

② $1x_1 + 2x_2 \leq 22$

③ $3x_1 + 3x_2 \leq 39$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

- ①이 하한 이하로 벗어나면 ①과 ②가 속박제약조건식으로 바뀜



우변상수의 변화: 비속박제약조건식

- ① $10x_1 + 4x_2 \leq 80$
  - 미사용자원이 존재하기 때문에 조립 1시간의 잠재가격은 0이 됨
  - ① 제약조건식 우변상수(b_1)의 실행가능범위
    - $76 \leq b_1 \leq \infty$
    - ① 제약조건식의 우변상수가 76 이상 무한대로 증가해도 현재의 최적해와 목적함수 값에는 아무런 영향을 미치지 않는다.

우변상수의 변화: 비속박제약조건식

- 비속박제약조건식 우변상수의 실행가능범위
  - 비속박제약조건식이 계속 비속박제약조건식으로 유지되는 우변상수의 변화 범위

하브루타 (Quiz #19, 20)

- 잠재가격(shadow price, 그림자 가격, marginal value, 한계가치, imputed cost, 부여원가)을 설명하시오.
- 속박제약조건식의 우변상수의 실행가능범위를 설명하시오.
- 비속박제약조건식의 우변상수의 실행가능범위를 설명하시오.

팀 과제: 평화전자(주)

- 모든 종업원이 1주일에 월요일부터 금요일까지 매일 앞 문제와 동일한 시간을 근무한다고 할 때, 이익을 최대화 하기 위해 1**주일에 각 모델을 얼마씩 생산**하여야 하는지 최적해를 구하시오. **단, 창고에 저장된 생산 제품은 매일 일과 후 반출된다고 한다.**
  - 각 제약조건식의 우변상수에 대한 잠재가격과 실행가능범위를 구하시오.

$$max \;\; Z = 6x_1 + 7x_2$$

$$s.t.$$

$$10x_1 + 4x_2 \le 400$$
$$1x_1 + 2x_2 \le 110$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 195$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 모든 종업원이 1주일에 월요일부터 금요일까지 매일 앞 문제와 동일한 시간을 근무한다고 할 때, 이익을 최대화 하기 위해 1**주일에 각 모델을 얼마씩 생산**하여야 하는지 최적해를 구하시오. **단, 창고에 저장된 생산 제품은 매주 토요일 주별 생산이 완료된 후 반출된다고 한다.**
  - 각 제약조건식의 우변상수에 대한 잠재가격과 실행가능범위를 구하시오.

$$\max\ Z = 6x_1 + 7x_2$$

$$s.t.$$

$$10x_1 + 4x_2 \leq 400$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 39$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 종업원 교육을 통해 모든 종업원이 조립 및 검사가 가능하게 되었다. 이때, 최적해를 구하시오.
  - 각 제약조건식의 우변상수에 대한 잠재가격과 실행가능범위를 구하시오.

$$max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2$$
$$s.t.$$
$$11x_1 + 6x_2 \leq 102$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 39$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 종업원 교육에 문제가 있어 검사만 하던 종업원은 조립도 가능하나, 조립만 하던 종업원은 검사는 못하는 것으로 밝혀졌다. 이때, 최적해를 구하시오.
  - 각 제약조건식의 우변상수에 대한 잠재가격과 실행가능범위를 구하시오.

$$
\begin{aligned}
&max\ \ Z = 6x_1 + 7x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 11x_1 + 6x_2 \le 102 \\
&\qquad 10x_1 + 4x_2 \le 80 \\
&\qquad 1x_1 + 2x_2 \le 102 \\
&\qquad 3x_1 + 3x_2 \le 39 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

팀 과제: 평화전자(주)

- 종업원 교육에 문제가 있어 조립만 하던 종업원은 검사도 가능하나, 검사만 하던 종업원은 조립은 못하는 것으로 밝혀졌다. 이때, 최적해를 구하시오.
  - 각 제약조건식의 우변상수에 대한 잠재가격과 실행가능범위를 구하시오.

$$max \;\; Z = 6x_1 + 7x_2$$

$$s.t.$$

$$11x_1 + 6x_2 \leq 102$$

$$10x_1 + 4x_2 \leq 102$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 22$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 39$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

팀 과제: 연습문제 3.02

- 다음과 같은 모델이 주어졌을 때 물음에 답하라.

$$
\begin{aligned}
& max\ \ Z = 4x_1 + 2x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 3x_1 + 1x_2 \le 12 \\
& \qquad 2x_1 + 2x_2 \le 16 \\
& \qquad 1x_1 - 1x_2 \le 2 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

  - 최적해를 구하라.
  - 각 제약조건식의 우변상수에 대한 잠재가격과 실행가능범위를 구하라.

- 목적함수가 $max\ Z = 9x_1 + 2x_2$ 일 때는 어떻게 되는가?
- 목적함수가 $max\ Z = 2x_1 - 4x_2$ 일 때는 어떻게 되는가?

쪽지 질문

End

그래프 방법 (최대화 문제)

End of Topic.09
선형계획법: 민감도 분석