제 11 장 검정

교재

(1) 확률 및 통계 입문(개정판), 이민영 지음, 경문사, 2016

(2) 사범대생을 위한 확률과 통계, 장세경 지음, 경문사, 2012

- 통계적 추론의 또 다른 분야는 가설검정이다.
- 가설은 모집단의 특성을 나타내는 예상이나 주장을 의미
- 가설검정(testing hypothesis)은 표본에 담긴 정보를 이용하여 가설의 옳고 그름을 통계적인 방법으로 판정하는 과정을 의미한다.

정의

모집단의 미지의 모수에 대한 주장을 가설이라 하고, 모집단에서 추출한 표본의 정보를 이용하여 미지의 모수에 대한 주장, 즉 가설의 옳고 그름을 판단하는 과정을 가설검정이라고 한다.

정의

모집단의 미지의 모수에 대한 타당성을 확인하고자 하는 주장을 대립가설(alternative hypothesis)이라 하고, 대립가설이 참이라는 확실한 근거가 없는 경우에 받아들이는 가설을 귀무가설(null hypothesis)이라고 한다.

기호 : 귀무가설 = H_0 대립가설 = H_1

참고. 가설검정의 목적은 모집단에서 추출한 표본만을 가지고 볼 때, 대립가설 H_1이 옳다고 할 수 있는지의 여부를 알아보는 것이다. 그러므로 귀무가설 H_0가 옳다고 할 수 있는지의 여부는 판단하지 않는다. 단지 귀무가설 H_0는 대립가설 H_1의 판단에서 활용하는 보조적인 가설일 뿐이다.

정의

대립가설 H_1의 모수의 영역이 한 방향으로 주어지는 가설검정을 단측검정(one-sided test)이라 하고, 양쪽 방향으로 주어지는 가설검정을 양측검정(two-sided test)이라고 한다. 그 중 단측검정은 모수를 기준으로 큰 방향 또는 작은 방향의 두 가지 종류가 있다.

기호 :

단측검정 I = 대립가설 H_1 : $\theta > \theta_0$, 귀무가설 H_0 : $\theta = \theta_0$ (또는 $\theta \le \theta_0$)

단측검정 II = 대립가설 H_1 : $\theta < \theta_0$, 귀무가설 H_0 : $\theta = \theta_0$ (또는 $\theta \ge \theta_0$)

양측검정 = 대립가설 H_1 : $\theta \ne \theta_0$, 귀무가설 H_0 : $\theta = \theta_0$

정의

귀무가설 H_0와 대립가설 H_1 중에서 하나의 가설을 선택하는데 사용하는 표본의 통계량을 **검정통계량**이라고 한다.

참고. 검정통계량은 추정에서와 마찬가지로 모집단의 알려진 정보에 따라 정규분포나 t-분포의 표준화 변수를 이용하여 계산한다.

정의

귀무가설 H_0가 기각되는 검정통계량의 영역을 **기각역**이라 하고, 채택되는 검정통계량의 영역을 **채택역**이라고 한다.

참고. 기각역 또는 채택역은 유의수준을 어떻게 정하느냐에 따라 달라진다. 검정통계량의 계산이 정규분포나 t-분포로 이루어지기 때문에 각 분포에서 유의수준(α)에 대응하는 기준값으로 영역이 결정된다.

가설검정의 결과를 나누어보면 귀무가설 H_0가 참인 경우에 이를 채택하거나 기각하는 두 가지 결정이 있고 귀무가설 H_0가 거짓인 경우에 이를 채택하거나 기각하는 두 가지 결정이 있다. 그러므로 가설검정에서는 2개의 오류가 발생하게 되는데 이것을 각각 제1종 오류와 제2종 오류라고 부른다.

결과 \ 사실	H_0 : 참	H_0 : 거짓
H_0 : 채택	옳은 결정	제2종 오류
H_0 : 기각 (H_1 : 채택)	제1종 오류	옳은 결정

- 제1종 오류를 범할 확률의 최대허용한계를 유의수준 또는 위험률이라 하고 α로 나타내며 제2종 오류를 범할 확률은 β로 나타낸다.
- 일반적으로 유의수준 α를 미리 정해놓고 β를 최소화하는 검정의 방법을 사용한다.

참고 가설검정의 순서

[1단계] 귀무가설 H_0와 대립가설 H_1을 설정한다.

[2단계] 유의수준 α를 결정한다.

[3단계] 검정통계량을 계산한다.

[4단계] 기각역을 판정한다.

[5단계] 검정통계량이 기각역 안에 들어가면 귀무가설 H_0를 기각하고 들어가지 않으면 귀무가설 H_0를 채택한다.

예 : 어떤 전자회사는 휴대폰 배터리의 한번 충전 후의 사용 평균수명을 100시간이 되도록 생산관리를 하였다고 한다. 품질을 개선하기 위하여 새로운 공법이 개발되었고 새로운 공법에 의해 생산한 배터리는 기존의 배터리에 비해 평균수명이 길어졌다고 주장한다.

이 주장을 확인하기 위하여 64개의 표본을 임의로 추출하여 수명을 측정한 결과 평균이 110시간이고 표준편차가 16시간이었다. 이 자료들로 “새로운 공법에 의한 배터리의 평균수명이 기존 배터리의 평균수명보다 길어졌다고 확신할 수 있는가?”의 문제는 새로운 공법에 의한 평균수명이 기존 공법에 의한 평균수명보다 길어졌다는 확신이 있을 때에만 새로운 공법을 채택하게 된다.

[1단계] 따라서 평균이 100시간이라는 주장과 평균이 100시간보다 길다는 주장을 비교해야 한다. 두 문장을 식으로 표현하면

$$\begin{cases} H_0 \ : \ \mu = 100 \\ H_1 \ : \ \mu > 100 \end{cases}$$

이고 이것은 단측검정 II이다.

여기서 귀무가설 H_0와 대립가설 H_1 중에서 어떤 가설을 채택할 것인지는 표본평균인 $\overline{X}$에 달려있다. $\overline{X}$의 값이 100보다 충분히 크면 대립가설 H_1을 채택하여 새로운 공법을 사용하는 것으로 결정을 내린다.

표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$이므로 표준화변수 $Z = \dfrac{\overline{X} - 100}{16/\sqrt{64}} = \dfrac{\overline{X} - 100}{2}$는 $Z \sim N(0, 1)$이다.

이때, 유의수준 5%([2단계])에 대하여 표본평균 $\overline{X}$의 값이 충분이 커서 $Z \geq z_{0.05} = 1.645$이면 귀무가설 H_0을 기각하고 대립가설 H_1을 채택한다. 표본평균 $\overline{X}$의 값이 크지 않아서 $Z < z_{0.05} = 1.645$이면 귀무가설 H_0을 채택하고 대립가설 H_1을 기각한다. 여기서는

$$Z = \frac{\overline{X} - 100}{2} = \frac{110 - 100}{2} = 5 \geq 1.645 \text{ ([3~4단계])}$$

이다.

검정통계량이 기각역 안에 들어가므로 귀무가설 H_0을 기각하고 대립가설 H_1을 채택한다.([5단계])

11.1 모평균의 검정

(a) 대표본에서 모평균의 검정($n \geq 30$)

정리

모분산 σ^2이 알려지거나 모집단의 분포가 정규분포든지 또는 임의의 분포든지 표본의 크기 n이 큰 경우(또는 $n \geq 30$)의 모평균 μ에 대한 가설검정에서의 가설, 검정통계량, 기각역은 다음과 같다. (단, μ_0는 모평균 μ에 대한 가설의 주장값이다.)

(1) 가설

① 귀무가설 H_0 : $\mu = \mu_0$, 대립가설 H_1 : $\mu > \mu_0$

② 귀무가설 H_0 : $\mu = \mu_0$, 대립가설 H_1 : $\mu < \mu_0$

③ 귀무가설 H_0 : $\mu = \mu_0$, 대립가설 H_1 : $\mu \neq \mu_0$

(2) 검정통계량

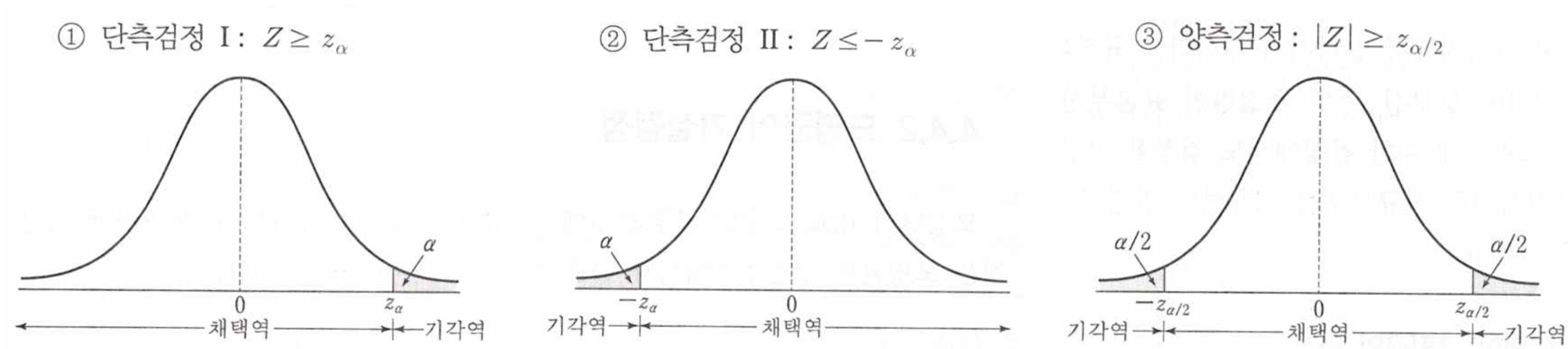
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 또는 } Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S\sqrt{n}}$$

(3) 기각역(귀무가설 H_0를 기각)

① 대립가설 H_1 : $\mu > \mu_0$일 때, $Z \geq z_\alpha$

② 대립가설 H_1 : $\mu < \mu_0$일 때, $Z \leq -z_\alpha$

③ 대립가설 H_1 : $\mu \neq \mu_0$일 때, $|Z| \geq z_{\alpha/2}$



예제 11-1 어느 꽁치 통조림의 염분 함량이 5%라고 표시되어 있다. 이를 확인하기 위하여 64통을 조사한 결과 염분 함량이 $\overline{X}=5.2(\%)$, $s=0.8(\%)$이었다. 이 통조림의 염분 함량 표시는 정당하다고 할 수 있는가? 유의수준 5%에서 검정하여라.

풀이 함량표시가 정당하지 않은 것은 $\mu \neq 5.2(\%)$이다. 따라서

귀무가설 $H_0 : \mu = 5.2$, 대립가설 $H_1 : \mu \neq 5.2$

유의수준 $\alpha = 0.05$, $\quad |Z| \geq z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = 1.96$

검정통계량 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{5.2 - 5}{0.8/\sqrt{64}} = 2 > 1.96$

따라서 유의수준 5%에서 H_0는 기각된다. 즉 함량표시는 정당하지 않다.

(b) 소표본에서 모평균의 검정(t-분포 이용, 교재 참고)

11.2 모비율의 검정

정리

모비율 p의 추정량인 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$가 알려지거나 표본의 크기 n이 큰 경우의 모비율 p에 대한 가설검정에서의 가설, 검정통계량, 기각역은 다음과 같다. (단, p_0는 모비율 p에 대한 가설의 주장값이다.)

(1) 가설

① 귀무가설 H_0 : $p=p_0$, 대립가설 H_1 : $p>p_0$

② 귀무가설 H_0 : $p=p_0$, 대립가설 H_1 : $p<p_0$

③ 귀무가설 H_0 : $p=p_0$, 대립가설 H_1 : $p\neq p_0$

(2) 검정통계량

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \quad (\text{단, } q_0 = 1 - p_0)$$

(3) 기각역

① 대립가설 H_1 : $p > p_0$일 때, $Z \geq z_\alpha$

② 대립가설 H_1 : $p < p_0$일 때, $Z \leq -z_\alpha$

③ 대립가설 H_1 : $p \neq p_0$일 때, $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

예제 11-3 어느 항공사에서 예약 취소율을 10% 정도로 예상하였다. 실제로 금년의 예약 취소는 100건 중 15건이었다. 이 항공사의 예상이 잘못되었다고 확신할 수 있는가? 유의수준 5%에서 검정하여라.

풀이 귀무가설 $H_0 : p = 0.1$, 대립가설 $H_1 : p \neq 0.1$

모비율 p에 대한 가설의 주장값 $p_0 = 0.1$

$$\hat{p} = \frac{15}{100} = 0.15.$$

$$\text{검정통계량 } |Z| = \frac{0.15 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{100}}} = \frac{0.05}{0.03} \fallingdotseq 1.67 < z_{0.05/2} = 1.96.$$

따라서 H_0를 기각하지 못한다. 즉 항공사의 예측이 잘못되었다는 근거가 있다고 할 수 없다.

11.3 두 모평균의 차에 관한 검정

(a) 대표본에서 (서로 독립인) 두 모평균의 차에 관한 검정

정리

서로 독립인 두 모집단의 각각의 모분산 σ_1^2과 σ_2^2이 알려지거나 두 모집단의 분포가 정규분포든지 또는 임의의 분포든지 각각의 표본의 크기 n_1과 n_2가 큰 경우(n_1, $n_2 \geq 30$)의 두 모평균 μ_1과 μ_2에 대한 가설검정에서의 가설, 검정통계량, 기각역은 다음과 같다.

(1) 가설

① 귀무가설 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$, 대립가설 H_1 : $\mu_1 > \mu_2$

② 귀무가설 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$, 대립가설 H_1 : $\mu_1 < \mu_2$

③ 귀무가설 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$, 대립가설 H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

(2) 검정통계량

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ 또는 } Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

(3) 기각역

① 대립가설 H_1 : $\mu_1 > \mu_2$일 때, $Z \geq z_\alpha$

② 대립가설 H_1 : $\mu_1 < \mu_2$일 때, $Z \leq -z_\alpha$

③ 대립가설 H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$일 때, $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

예제 11-4 화장비누를 제조 판매하는 회사가 있다. 두 종류의 기계를 설치하여 만드는데 제품의 특성 중에서 강도 차이가 있는지를 검사하려고 한다. 이 검사를 위해 임의로 표본을 추출하여 일정시간 동안 물속에 담근 후에 조사하였다. 조사결과 다음과 같은 자료를 얻었다. 여기서 평균수치가 높은 것일수록 강도가 더 높다는 것을 의미한다. 다음 자료를 이용하여 두 기계로 만든 비누제품의 품질은 같다고 할 수 있는가? 유의수준 $\alpha=5\%$에서 검정하여라.

기계 A	기계 B
$n_1=35$	$n_2=30$
$\overline{X}=2.4$	$\overline{Y}=4.5$
$S_1=4.0$	$S_2=6.2$

풀이 귀무가설 $H_0: \mu_1=\mu_2$, 대립가설 $H_1: \mu_1\neq\mu_2$, 유의수준 $\alpha=0.05$, $z_{\alpha/2}=1.96$.

검정통계량 $|Z|=\left|\dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}\right|=\left|\dfrac{2.4-4.5}{\sqrt{4^2/35+6.2^2/30}}\right|=\dfrac{2.1}{1.32}\fallingdotseq 1.59<1.96.$

따라서 기각역에 포함되지 않으므로 H_0가 채택된다.

즉, 두 기계로 만든 비누제품의 품질에 차이가 없다고 할 수 있다.

(b) 소표본에서 (서로 독립인) 두 모평균의 차에 관한 검정(t-분포, 교재 참고)

(c) 두 모비율의 차에 대한 검정

정리 16

서로 독립인 두 모집단의 각각의 모비율 p_1과 p_2의 추정량인 각각의 표본비율 $\hat{p}_1 = \dfrac{X_1}{n_1}$과 $\hat{p}_2 = \dfrac{X_2}{n_2}$가 알려지거나 각각의 표본의 크기 n_1과 n_2가 큰 경우의 두 모비율 p_1과 p_2에 대한 가설검정에서의 가설, 검정통계량, 기각역은 다음과 같다.

(1) 가설

① 귀무가설 H_0 : $p_1 = p_2$, 대립가설 H_1 : $p_1 > p_2$

② 귀무가설 H_0 : $p_1 = p_2$, 대립가설 H_1 : $p_1 < p_2$

③ 귀무가설 H_0 : $p_1 = p_2$, 대립가설 H_1 : $p_1 \neq p_2$

(2) 검정통계량

$$Z = \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{(단, } \hat{q} = 1 - \hat{p}\text{)}$$

(3) 기각역

① 대립가설 H_1 : $p_1 > p_2$일 때, $Z \geq z_\alpha$

② 대립가설 H_1 : $p_1 < p_2$일 때, $Z \leq -z_\alpha$

③ 대립가설 H_1 : $p_1 \neq p_2$일 때, $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

$\hat{p_1} - \hat{p_2}$를 표준화시킨 통계량 $Z = \frac{(\hat{p_1} - \hat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p_1 q_1 / n_1 + p_2 q_2 / n_2}}$

미지의 공통인 모비율 p는 $\hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$로 추정될 수 있다.

따라서 $\hat{p_1} - \hat{p_2}$의 표준오차는 $\sqrt{\hat{p}\hat{q}(1/n_1 + 1/n_2)}$.

예제 11-6 완구제품을 생산하는 제조업체에서 제품의 품질관리를 위하여 A공정라인, B공정라인에서 각각 제조된 완구제품을 조사하고 있다. 품질검사원이 임의로 표본을 추출하여 조사한 결과, A공정라인에서 제조한 제품은 105개 중 16개가 불량품이었으며, B공정라인에서는 96개 중 20개가 불량품이었다. A, B 두 공정라인의 불량비율에 차가 있다고 할 수 있는가? 유의수준 $\alpha = 0.05$로 검정하여라.

풀이 A 공정라인 : $n_1 = 105,\ X_1 = 16,\ \hat{p_1} = \frac{16}{105} = 0.152$

B 공정라인 : $n_2 = 96,\ X_2 = 20,\ \hat{p_2} = \frac{20}{96} = 0.208$

귀무가설 H_0 : $p_1 = p_2$, 대립가설 $H_1 : p_1 \neq p_2$, 유의수준 $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = 1.96$

$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{16+20}{105+96} = 0.179$ 이므로

검정통계량 $|Z| = \left| \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| = \left| \frac{0.152 - 0.208}{\sqrt{0.179 \cdot 0.821\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{96}\right)}} \right| \fallingdotseq 1.037 < 1.96$.

따라서 기각역에 포함되지 않으므로 H_0가 채택된다.

즉, 두 공정라인에서 만든 완구제품의 불량률은 차이가 없다고 할 수 있다.

(d) 짝진(대응)표본에서 두 모평균의 차에 관한 검정(교재 참고)